Universidade de Aveiro
2007

Departamento de Matemática

Joana Rita Gomes Silva
Roxo Santos

Temas de Geometria
nos Ensinos Básico e Secundário

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2007

Joana Rita Gomes Silva Roxo Santos

Temas de Geometria nos Ensinos Básico e Secundário

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática (Perfil Ensino), realizada sob a orientação científica da Doutora Rosa Amélia Soares Martins, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Dedico este trabalho aos meus pais, à minha irmã, à minha colega e amiga Fátima e à minha amiga Zirita, por todo o apoio e incentivo que me deram.

O júri

Presidente: Professora Doutora Ana Maria Reis d' Azevedo Breda, Professora Associada com Agregação da Universidade de Aveiro.

Arguente: Professora Doutora Maria do Rosário Machado Lema Sinde Pinto, Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Doutora Rosa Amélia Baptista Ferreira Soares Martins, Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro, (Orientadora).

Agradecimentos

Agradeço à Professora Rosa Amélia Soares Martins a orientação, o apoio e a disponibilidade que sempre me dispensou ao longo da realização deste trabalho.

Agradeço, também, ao meu colega Jorge Pereira por todo o "apoio técnico".

Palavras-chave

Construções geométricas, números construtíveis, problemas clássicos da antiguidade, dobragens, origami.

Resumo

Neste trabalho são estudadas as construções geométricas com régua não graduada e compasso abordadas na disciplina de Educação Visual do 3.º Ciclo do Ensino Básico. São, também, estudados os números construtíveis e os três problemas clássicos da antiguidade. Faz-se, ainda, uma incursão pelas construções em origami – é introduzido um conjunto de "axiomas", formulados por Humiaki Huzita, os quais permitem a realização de construções geométricas através de dobragens em papel. São apresentados e resolvidos com construções origami problemas elementares, incluindo alguns que não podem ser resolvidos com régua não graduada e compasso: os problemas clássicos da trissecção do ângulo e da duplicação do cubo.

Keywords

Geometric constructions, constructible numbers, the classic problems of the antiquity, folding, origami.

Abstract

This work is about the geometric constructions with straightedge and compass studied in the subject of Visual Education of the 3rd Cycle of the Basic Teaching. It is also about the constructible numbers and the three classic problems of the antiquity. It is also made an incursion through the origami constructions - a group of "axioms" is introduced, formulated by Humiaki Huzita, which allows the accomplishment of geometric constructions through folding in paper. Elementary problems are presented and solved with origami constructions, including some that cannot be solved with the help of straightedge and compass: the classic problems of the trisection of the angle and the duplication of the cube.

Índice

Introdução

Este trabalho pretende mostrar que a Matemática, em particular a Geometria pode ser utilizada como suporte de outras disciplinas bem como outras disciplinas podem ser o suporte para a própria Matemática.

No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando o aluno a "falar" e a "escrever" sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados.

Um princípio que enaltece a interdisciplinaridade da área de Matemática, em particular da Geometria, com outros saberes é o facto de o significado da Matemática para o aluno resultar das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e o seu quotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos.

O mundo actual caracteriza-se por uma utilização do visual em quantidade inigualável na história; a educação em artes visuais requer trabalho continuamente informado sobre os conteúdos e experiências relacionados com os materiais, com as técnicas e as formas visuais de diversos momentos históricos; criar e perceber formas visuais implica trabalhar frequentemente com as relações entre os elementos que as compõem, tais como ponto, linha, plano, cor, luz, movimento e ritmo.

Hoje em dia mais do que a interdisciplinaridade deve procurar-se transdisciplinaridade, ou seja, uma nova abordagem que contamina todos e se preocupa com uma interacção entre as disciplinas, não as perdendo de vista e buscando um além de si: a sua finalidade é a compreensão do mundo presente, de modo a que possa haver uma unidade plural de conhecimentos.

A transdisciplinaridade torna-se um desafio colectivo: cada professor, no caso, a partir de um macroplaneamento, entra na disciplina do colega, aprende com ela e com ele, olha pela óptica do outro professor, contribui com sua actuação e saber específicos, analisando prática e teoria utilizadas por ambos. O conceito do termo já incita a amplitude, pois é tudo aquilo que está entre, através e além das disciplinas. É muito mais que romper fronteiras das disciplinas. Deve haver um objectivo maior, humano, em relação à formação plena do aluno e continuada dos próprios professores.

O professor de Matemática pode fazer a análise histórica da disciplina ou trabalho lúdico e criativo, próprio do professor de arte (e vice-versa). Todos poderiam avançar no seu conhecimento iluminando a sua própria abordagem, apropriando-se de outra forma de tratar o "seu" assunto, até que para o aluno, já não existiria diferença se é este ou aquele professor, que o contaminaria com a plenitude deste ou daquele conhecimento, nesta ou naquela disciplina.

Este é o ideal a ser perseguido, o que depende de uma acção global da escola.

Ao debruçar-me sobre o tema: "***Temas de Geometria nos Ensinos Básico e Secundário***" procurei essa transdisciplinaridade essencialmente com a disciplina de Educação Visual e com a Física. Seria interessantíssimo este estudo no âmbito de outras disciplinas mas tornar-se-ia muito longo, e o tempo não me permitia ir tão longe. Então o objectivo do trabalho não foi estudar exaustivamente processos e métodos geométricos, foi sim mostrar que muitas vezes o que não se resolve por uma via pode ser resolvida por outra, ou ainda que muitas vezes existem várias formas de resolver a mesma questão, indo buscar ajuda a outras disciplinas.

O trabalho começa com uma súmula de resultados preliminares que vão sendo necessários ao longo do desenvolvimento do trabalho. No fim em apêndice, estão demonstrações de propriedades. O corpo do trabalho é desenvolvido em três capítulos:

Capítulo I: Temas de Geometria na Educação Visual;

Capítulo II: Os Números Construtíveis e os Três Famosos Problemas da Antiguidade Clássica;

Capítulo III: Construções Geométricas com Origami.

No capítulo I, depois de uma pesquisa de temas de Geometria, no programa da Educação Visual, procurou-se fundamentar matematicamente as construções geométricas feitas com régua não graduada e compasso e estudar quais são os polígonos regulares possíveis de construir utilizando apenas estes instrumentos euclidianos. Fez-se também um estudo das espirais e do número de ouro.

No seguimento do que foi feito no Capítulo I, no Capítulo II estudou-se o problema da construtibilidade. Neste mesmo Capítulo estudaram-se os três famosos problemas da Antiguidade Clássica, no sentido de mostrar que usando régua não graduada e compasso não é possível a resolução de nenhum destes problemas mas é possível usando outros processos, em particular processos cinemáticos.

Por fim, no Capítulo III, Construções Geométricas com Origami, fizeram-se demonstrações de teoremas usando dobragens. Além disso tentou mostrar-se que o que por vezes é inconstrutível usando apenas régua não graduada e compasso é no entanto construtível com uma simples folha de papel e seis operações (dobragens) que também são chamados de axiomas.

Resultados Preliminares

A - Resultados Aceites Sem Demonstração

(1) Axiomas da Geometria Euclidiana ([2], [8])

A₁ : Por cada par de pontos distintos passa uma e uma só recta.

A₂ : Cada recta contém pelo menos dois pontos.

A₃ : Existem pelo menos três pontos não colineares.

A₄ : A cada par de pontos distintos, P e Q, podemos associar um número real, $d(P,Q)$, a que chamamos *distância* de P a Q, que satisfaz a:

i) $d(P,Q)$ é não negativa

ii) $d(P,Q)=0$ se e só se $P=Q$

iii) $d(P,Q)=d(Q,P)$

A₅ : Cada recta t possui uma régua f, que é uma função bijectiva $f:t\to\mathbb{R}$ tal que $d(P,Q)=\left|f(P)-f(Q)\right|$.

A₆ : O conjunto de pontos que não pertencem a uma dada recta t é a união de dois conjuntos convexos disjuntos tais que, se P está num deles e Q está no outro, o segmento $[PQ]$ intersecta t.

A₇ : A cada ângulo $\measuredangle ABC$ está associado um único número real $A\hat{B}C$ a que chamamos amplitude do ângulo e que pertence ao intervalo $]0,\pi[$.

A₈ : Sejam A e B dois pontos distintos e H um dos semiplanos limitados pela recta AB. Então, dado α em $]0,\pi[$, existe uma única semi-recta $\dot{A}B$, com P em H, tal que $P\hat{A}B=\alpha$.

A₉ : Se D for um ponto interior do ângulo $\measuredangle BAC$, então $B\hat{A}C=B\hat{A}D+D\hat{A}C$.

A₁₀ : Se os ângulos $\measuredangle ABC$ e $\measuredangle ABD$ forem suplementares adjacentes então $A\hat{B}C+A\hat{B}D=\pi$.

A_{11} : Se, numa correspondência entre dois triângulos, dois lados de um dos triângulos e o ângulo por eles formado forem congruentes às partes correspondentes do outro triângulo, então essa correspondência é uma congruência.

A_{12} ***Axioma das Paralelas***

Por um ponto exterior a uma recta passa uma e uma só recta paralela à primeira.

(2) Critérios de Igualdade de Triângulos

- ***Critério LLL*** : Dois triângulos são geometricamente iguais se tiverem, de um para o outro, os três lados iguais.
- ***Critério LAL***[1]: Dois triângulos são geometricamente iguais se tiverem, de um para o outro, dois lados iguais e o ângulo compreendido entre eles igual.
- ***Critério LAA*** : Dois triângulos são geometricamente iguais se têm, de um para o outro, um lado igual e os ângulos adjacentes a esse lado iguais.

(3) Critérios de Semelhança de Triângulos

- ***Critério LLL***: Dois quaisquer triângulos que têm, de um para o outro, os lados correspondentes proporcionais são semelhantes.
- ***Critério LAL***: Dois quaisquer triângulos em que, de um para o outro, ângulos iguais subentendam lados proporcionais são semelhantes.
- ***Critério AAA***: Dois quaisquer triângulos com ângulos internos iguais, de um para o outro, são semelhantes.

(4) Teoremas

4.1. Num triângulo a lados iguais opõem-se ângulos iguais e reciprocamente.

4.2. Em triângulo iguais, a lados iguais de um para o outro opõem-se ângulos iguais e reciprocamente.

4.3. Em triângulos semelhantes a ângulos iguais de um para o outro opõem-se lados proporcionais e reciprocamente.

[1] Axioma A_{11}

4.4. Ângulos que têm, de um para o outro, lados paralelos são iguais ou suplementares[2].

4.5. Ângulos que têm, de um para o outro, lados perpendiculares ou são iguais ou suplementares.

4.6. Se dois ângulos são iguais e têm, de um para o outro, um lado paralelo então o outro também o é.

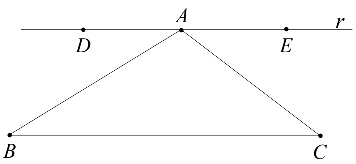
4.7. Ângulos verticalmente opostos são iguais.

B - Demonstração de Resultados

(1) Propriedades dos Triângulos

Teorema T1: A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

Prova



Consideremos o triângulo $[ABC]$ e a recta r paralela ao lado $[BC]$ do triângulo.

Sejam D e E pontos da recta.

Temos que $\measuredangle\, DAB \cong \measuredangle\, ABC$ e $\measuredangle\, EAC \cong \measuredangle\, ACB$, pois são ângulos agudos de lados paralelos.

Como o $\measuredangle\, DAE$ é raso, tem-se que $D\hat{A}B + B\hat{A}C + C\hat{A}E = 180^{\circ}$.

Donde $A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B = 180^{\circ}$, isto é a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

Corolário: Dois quaisquer triângulos com dois ângulos internos iguais, de um para o outro, são semelhantes.

Prova

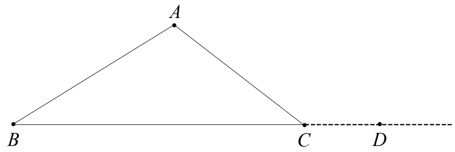
A prova é consequência imediata do critério AAA da semelhança de triângulos e do teorema anterior.

[2] A soma das suas amplitudes é 180º

Teorema T2: A amplitude de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes. [2]

Prova

Seja $[ABC]$ um triângulo e seja D um ponto pertencente ao prolongamento de $[BC]$ para além de C.



Por um lado sabemos que

(i) $A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B = 180^{\circ}$, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º;

por outro lado,

(ii) $B\hat{C}A + A\hat{C}D = 180^{\circ}$, porque o ângulo $\measuredangle BCD$ é raso por construção.

De (i) e (ii) vem $A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B = B\hat{C}A + A\hat{C}D$,

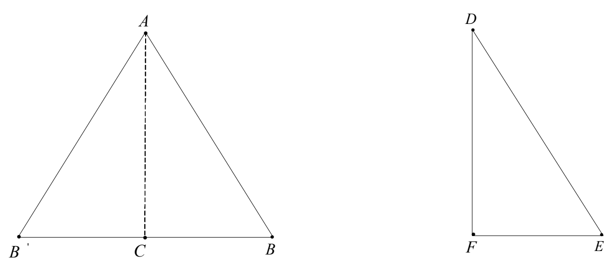
isto é,

$$A\hat{B}C + C\hat{A}B = A\hat{C}D.$$

Teorema T3: Triângulos rectângulos que têm, de um para o outro, um cateto e a hipotenusa iguais, são geometricamente iguais.

Prova

Sejam $[ABC]$ e $[DEF]$ dois triângulos rectângulos em C e em F, respectivamente, tais que



(i) $[AB] \cong [DE]$ e

(ii) $[AC] \cong [DF]$,

e seja $B' \in CB$ tal que $[CB'] \cong [FE]$ e C é um ponto de $[BB']$.

Como o ângulo $\measuredangle B'CA$ também é recto, tem-se que os triângulos $[AB'C]$ e $[DEF]$ são geometricamente iguais, pelo critério LAL. Logo $[AB'] \cong [DE]$ e, portanto $[AB'] \cong [AB]$.

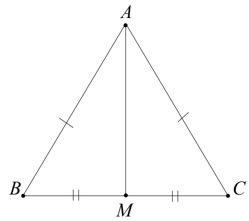
Donde $\measuredangle B' \cong \measuredangle B$ porque num triângulo a lados iguais opõem-se ângulos geometricamente iguais e $\measuredangle B' \cong \measuredangle E$ porque em triângulos iguais a lados iguais opõem-se ângulos geometricamente iguais.

Por simetria e transitividade da relação $"\cong"$ vem $\measuredangle B \cong \measuredangle E$.

Logo os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são geometricamente iguais, porque têm de um para o outro, os três ângulos geometricamente iguais, pois têm ambos um ângulo recto, o $\measuredangle CBE \cong \measuredangle FED$ e pelo corolário do Teorema T1 podemos concluir que $\measuredangle BAC \cong \measuredangle EDF$.

Teorema T4: Se o triângulo $[ABC]$ for isósceles de base $[BC]$ e M o ponto médio da base, então tem-se $[AM] \perp [BC]$ e $[AM]$ bissecta o ângulo $\measuredangle BAC$.

Prova



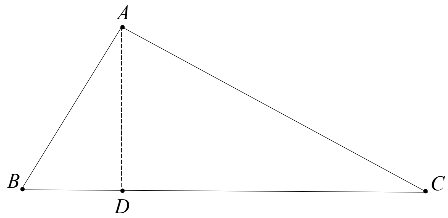
Por construção os triângulos têm, de um para o outro, os três lados correspondentes iguais, logo os triângulos $[ABM]$ e $[AMC]$ são geometricamente iguais.

Donde $B\hat{M}A = C\hat{M}A$, pois em triângulos iguais a lados iguais opõem-se ângulos iguais.

Como estes ângulos são suplementares e adjacentes são ambos rectos e também $B\hat{A}M = M\hat{A}C$, o que mostra que $\dot{A}M$ é a bissectriz do $\measuredangle BAC$.

Teorema T5: Num triângulo rectângulo a altura em relação à hipotenusa divide-o em dois triângulos semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo inicial.

Prova



Seja $[ABC]$ um triângulo rectângulo em A, e $[AD]$ a altura do triângulo em relação à hipotenusa.

Tem-se que:

(i) $[ABC] \sim [ADC]$ porque têm os ângulos iguais, pois $B\hat{A}C = A\hat{D}B = 90^{\circ}$, e o ângulo $\measuredangle ACD$ é comum aos dois triângulos.

De modo análogo se prova que:

(ii) $[ABC] \sim [ABD]$.

Por (i), (ii) e aplicando a transitividade da relação $\sim$, concluímos que

(iii) $[ABD] \sim [ADC]$.

Logo $[ABC] \sim [ADC] \sim [ABD]$.

Teorema T6[3]: Num triângulo rectângulo a altura correspondente à hipotenusa é meio proporcional entre os segmentos que determina na hipotenusa.

Prova

Usando a figura do teorema anterior tem-se $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$.

A prova é uma consequência do teorema anterior e do facto de, em triângulos semelhantes, a ângulos iguais, de um para o outro, se oporem lados proporcionais.

Teorema T7: A área de qualquer círculo é igual à área de um triângulo rectângulo em que um dos catetos é igual ao raio e outro é igual ao perímetro do círculo.

Prova

Seja $[ABC]$ um triângulo rectângulo em A.

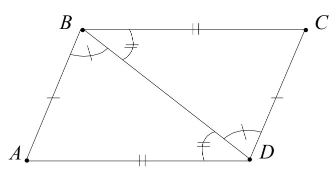
Se a medida do comprimento de um cateto do triângulo é $2\pi r$ e a do outro cateto é r, então a sua área é $\dfrac{(2\pi r)\times r}{2} = \pi r^2$, ou seja, a área do círculo.

(2) Propriedades dos Quadriláteros

Teorema Q1: Se os lados opostos de um quadrilátero são geometricamente iguais então o quadrilátero é um paralelogramo e reciprocamente, isto é, num paralelogramo lados opostos são geometricamente iguais.

Prova

Seja $[ABCD]$ um quadrilátero em que $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{BC} = \overline{AD}$.



3 Teorema da altura.

Tracemos a diagonal $[BD]$ do quadrilátero.

Usando o critério LLL da igualdade de triângulos podemos concluir que o triângulo $[ABD]$ é geometricamente igual ao triângulo $[CDB]$.

Logo, porque em triângulos iguais a lados iguais se opõem ângulos iguais,

(i) $C\hat{B}D = B\hat{D}A$

(ii) $C\hat{D}B = D\hat{B}A$.

De (i) concluímos que $[BC] \parallel [AD]$[4].

De (ii) concluímos que $[CD] \parallel [BA]$[5].

Logo o quadrilátero $[ABCD]$ é um paralelogramo.

Para provar o recíproco o raciocínio é análogo, só que agora os dois triângulos $[ABD]$ e $[BCD]$ são geometricamente iguais pelo critério LAA. Como em triângulos iguais a ângulos iguais se opõem lados iguais vem $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{BC} = \overline{AD}$.

Teorema Q2: As bissectrizes de um losango são perpendiculares entre si e bissectam-se.

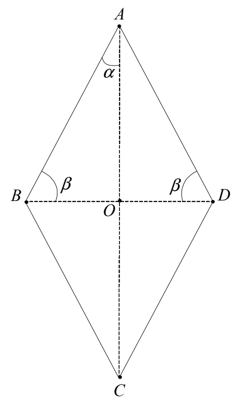
Prova

Seja $[ABCD]$ um losango e O o ponto de intersecção das suas diagonais.

Vamos provar que:

(1) $[AC] \perp [BD]$;

(2) $\overline{BO} = \overline{OD}$ e $\overline{AO} = \overline{OC}$.



Sabemos que o triângulo $[ABD]$ é isósceles, pois $\overline{AB} = \overline{AD}$.

Então os ângulos da base, $\measuredangle ABD$ e $\measuredangle ADB$, são iguais.

Sabemos também que os ângulos $\measuredangle OAB$ e $\measuredangle OAD$ são geometricamente iguais porque os triângulos $[ABC]$ e $[ACD]$ são isósceles[6] e geometricamente iguais, pois têm, de um para o outro, os três lados iguais.

[4] Resultados preliminares _Teorema 4.4.

[5] Resultados preliminares _Teorema 4.4

[6] Por definição de losango.

Seja $\alpha = O\hat{A}B = O\hat{A}D$ e $\beta = A\hat{B}D = A\hat{D}B$.

Então $2\alpha + 2\beta = 180^{\circ} \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^{\circ}$.

Logo no triângulo $[ABO]$ a amplitude do outro ângulo, $\measuredangle BOA$, tem que ser igual a 90^{o} e portanto $[AC] \perp [BD]$.

Provemos agora (2), ou seja, que as diagonais se bissectam.

Ora, $[ABO] \cong [AOD]$ pois são triângulos rectângulos que têm de um para o outro, um cateto e a hipotenusa iguais. Donde o outro lado tem que ser também igual. Ou seja, $\overline{BO} = \overline{OD}$.

De modo análogo se prova que $\overline{AO} = \overline{OC}$:

Sabemos que $\overline{AB} = \overline{BC}$, pois são lados de um losango. Como os triângulos $[ABO]$ e $[BCO]$ são rectângulos e têm, de um para o outro, um cateto e a hipotenusa iguais, tem-se que $[ABO] \cong [BCO]$.

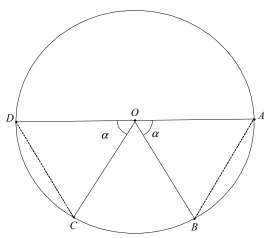
Logo $\overline{AO} = \overline{OC}$.

(3) Propriedades das Circunferências

Teorema C1: Numa circunferência as cordas correspondentes a ângulos ao centro iguais são geometricamente iguais e a cordas geometricamente iguais correspondem ângulos ao centro geometricamente iguais.

Prova

Provemos que se $A\hat{O}B = C\hat{O}D$ então $\overline{AB} = \overline{DC}$.



Ora, por hipótese $A\hat{O}B = C\hat{O}D$ e $\overline{OC} = \overline{OB} = \overline{OA} = \overline{OD}$ porque são raios da circunferência. Usando o critério LAL tem-se que $[AOB] \cong [COD]$, e como em triângulos geometricamente iguais a ângulos iguais correspondem lados iguais tem-se que $\overline{AB} = \overline{DC}$.

Provemos agora que se $\overline{AB} = \overline{DC}$ então $A\hat{O}B = C\hat{O}D$.

Por hipótese $\overline{AB} = \overline{DC}$ e $\overline{OC} = \overline{OB} = \overline{OA} = \overline{OD}$, porque são raios da mesma circunferência.

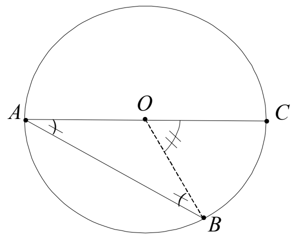
Então pelo critério LLL concluímos que os triângulos $[OCD]$ e $[OBA]$ são geometricamente iguais.

Logo $A\hat{O}B = C\hat{O}D$, porque a lados iguais opõem-se ângulos iguais.

Teorema C2: A amplitude de um ângulo inscrito numa circunferência é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados. ([3], página 129)

Prova

Iremos considerar três casos distintos:



1.º Caso: um dos lados do ângulo é um diâmetro.

Sejam A o vértice do ângulo inscrito e B e C os pontos em que os seus lados intersectam a circunferência.

Suponhamos que o centro O da circunferência pertence ao lado $\dot{A}C$. Neste caso, a medida do arco correspondente ao ângulo inscrito é a medida do $\measuredangle BOC$.

Como $\overline{BO} = \overline{AO}$ então o triângulo $[OAB]$ é isósceles e portanto $O\hat{A}B = O\hat{B}A$.

Mas o $\measuredangle BOC$ é um ângulo externo do triângulo $[OAB]$, então $B\hat{O}C = O\hat{A}B + O\hat{B}A$, logo $B\hat{O}C = 2 \times C\hat{A}B$, isto é $C\hat{A}B = \frac{1}{2} B\hat{O}C$.

Provámos, deste modo, que neste caso particular o teorema se verifica.

Suponhamos agora que nenhum dos lados do ângulo inscrito é um diâmetro.

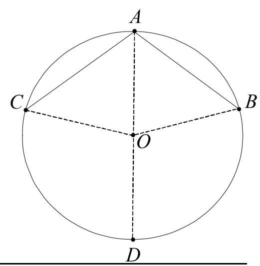
Tracemos então o diâmetro que passa pelo vértice A do ângulo inscrito e seja D a outra extremidade deste diâmetro. Pelo 1.º caso concluímos que

(i) $B\hat{O}D = 2 \times B\hat{A}D$ e

(ii) $D\hat{O}C = 2 \times D\hat{A}C$.

Teremos dois casos.

2.º Caso: o centro da circunferência pertence ao interior do ângulo $\measuredangle BAC$.



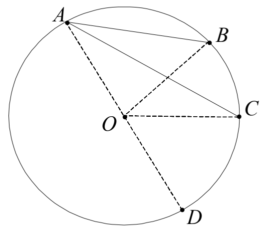
Neste caso temos que $B\hat{A}D + D\hat{A}C = B\hat{A}C$.

Se adicionarmos as igualdades (i) e (ii) tem-se:

$$B\hat{O}D + D\hat{O}C = 2\times\left(B\hat{A}D + D\hat{A}C\right) = 2\times B\hat{A}C .$$

Ou seja, $B\hat{O}D + D\hat{O}C$ é exactamente a amplitude do arco correspondente ao ângulo $\measuredangle BAC$.

3.º Caso: o centro da circunferência está no exterior do ângulo $\measuredangle BAC$.



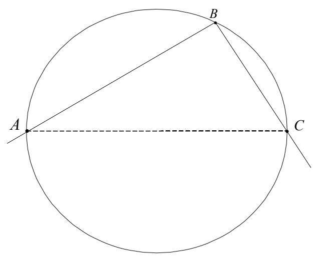
Neste caso temos que $B\hat{A}C = B\hat{A}D - C\hat{A}D$. Então, se subtrairmos a igualdade (ii) à igualdade (i), tem-se

$$B\hat{O}D - D\hat{O}C = 2\times\left(B\hat{A}D - D\hat{A}C\right) = 2\times B\hat{A}C .$$

Observemos que $B\hat{O}D - D\hat{O}C$ é exactamente a medida do arco correspondente ao ângulo $\measuredangle BAC$.

Corolário: Qualquer ângulo inscrito numa semicircunferência é recto.

Prova



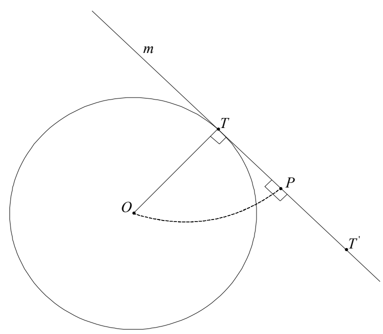
Ora, se o ângulo está inscrito numa semicircunferência então a amplitude do arco compreendido entre os seus lados é 180^o .

Pelo teorema anterior tem-se que a amplitude do ângulo é metade, ou seja 90^o .

Donde o ângulo é recto.

Teorema C3: Uma recta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio que liga o centro ao ponto de tangencia. ([3], página 125)

Prova



Consideremos o círculo de centro O e a recta m que lhe seja tangente. Seja T o ponto de tangencia.

Designemos por P o pé da perpendicular que une o ponto O à recta m .

Iremos provar que P e T são coincidentes.

Suponhamos que P e T são pontos distintos.

Então $[OT]$ é a hipotenusa do triângulo rectângulo $[OPT]$. Portanto $\overline{OP} < \overline{OT}$. Como $[OT]$ é um raio então P é um ponto que está no interior do círculo.

Tomemos um ponto T' sobre a recta m tal que $\overline{PT} = \overline{PT'}$, com $T \neq T'$. Pelo critério LAL, da igualdade de triângulos, concluímos que $[OPT] \cong [OPT']$. Portanto $\overline{OT} = \overline{OT'}$. Mas então T' é outro ponto da recta m que também pertence ao círculo. Logo a recta m não é tangente, o que é uma contradição.

Assim P e T coincidem e o teorema fica demonstrado.

(4) Propriedades dos Polígonos Regulares

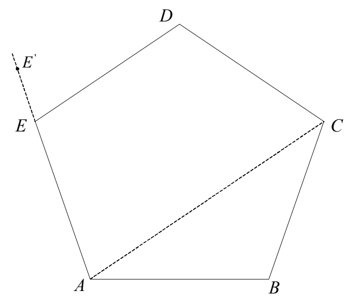
Teorema P1: Cada diagonal de um pentágono regular é paralela ao lado oposto.

Prova

Queremos provar que, por exemplo, $[AC] \| [ED]$.

Prolonguemos o lado $[EA]$ do pentágono para além do ponto E e seja E' um ponto desse prolongamento.

Iremos provar que $D\hat{E}E' = C\hat{A}E$.



Ora,

(i) $D\hat{E}A = 108^{\circ}$, pois é o ângulo interno do pentágono

(ii) o ângulo $\measuredangle AEE'$ é raso.

Por (i) e (ii) tem-se que

(iii) $D\hat{E}E' = 180^{\circ} - 108^{\circ} = 72^{\circ}$.

O triângulo $[ABC]$ é isósceles, donde os ângulos da base são iguais. Como $A\hat{B}C = 108^{\circ}$ e a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° tem-se, fazendo $B\hat{A}C = x$, que

$$2x + 108^{\circ} = 180^{\circ} \Leftrightarrow x = 36^{\circ}.$$

Logo

(iv) $E\hat{A}C = 108^{\circ} - 36^{\circ} = 72^{\circ}$.

Por (iii) e (iv) concluímos que $\measuredangle DEE' \cong \measuredangle CAE$.

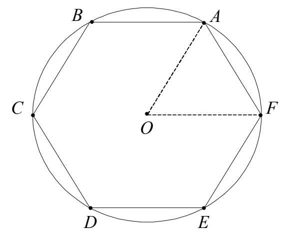
Donde $[AC] \| [ED]$.

De modo análogo provamos que o mesmo se passa para as outras diagonais e para os outros lados.

Teorema P2: O lado de um hexágono regular inscrito numa circunferência é igual ao raio.

Prova

Unindo o centro da circunferência com os vértices do hexágono obtemos seis triângulos. Seja $[AOF]$ um deles.



$\overline{FO} = \overline{AO}$, porque são raios da circunferência.

$A\hat{O}F = \dfrac{360º}{6} = 60º$.

O triângulo $[AFO]$ é isósceles, então os ângulos da base são iguais, seja ξ a sua amplitude.

Então $2\xi + 60º = 180º \Leftrightarrow \xi = 60º$.

Num triângulo tem-se que a ângulos iguais opõem-se lados iguais, donde $\overline{AF} = \overline{AO} = \overline{OC}$.

Capítulo I

Temas de Geometria na Educação Visual

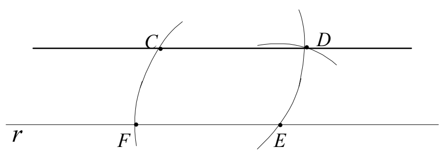
Neste capítulo irão ser estudadas as construções geométricas que habitualmente são dadas na disciplina de Educação Visual do 3.º Ciclo do Ensino Básico e algumas outras construções do mesmo tipo que estão relacionadas e são úteis no desenvolvimento deste trabalho. Todas elas são construções geométricas com régua não graduada e compasso.

1.1 Construção de uma recta paralela a uma recta dada que passa por um ponto exterior.

Dada uma recta r e um ponto C exterior podemos traçar uma paralela à recta r que passa pelo ponto C da seguinte forma:

Traça-se um arco de circunferência com centro em C para que este intersecte a recta r e denomine-se esse ponto por E.

Agora com centro em E e raio igual ao da circunferência anterior desenha-se um arco de circunferência que intersecta a recta r num ponto que denominamos por F.



Com centro em E e raio $\overline{CF}$ traça-se um arco.

Denominemos por D o ponto de intersecção deste arco com o arco da circunferência de centro C e raio $\overline{CE}$. Então $\overline{ED} = \overline{CF}$ e $\overline{CD} = \overline{CE}$

Unindo C com D obtemos uma recta paralela à recta r, porque no quadrilátero $[CDEF]$ tem-se $\overline{CF} = \overline{DE}$ e $\overline{CD} = \overline{FE}$ e já vimos[7] que quadriláteros com lados iguais dois a dois são necessariamente paralelogramos. Tem-se portanto que $CD \parallel FE$.

[7] Teorema Q1_ Resultados preliminares

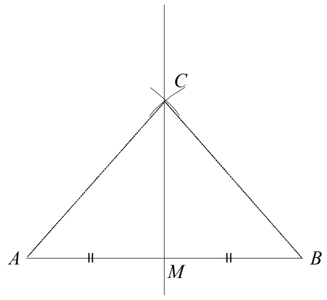
1.2 Mediatriz de um Segmento de Recta

Mediatriz de um segmento de recta é a recta que passa pelo ponto médio do segmento e lhe é perpendicular.

Proposição:

A mediatriz de um segmento de recta $[AB]$ é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de A e B.

Prova



Seja M o ponto médio de $[AB]$.

Provemos que qualquer ponto da recta CM, mediatriz de $[AB]$, é equidistante de A e de B.

Seja $C \neq M$ um ponto qualquer da mediatriz do segmento $[AB]$.

Queremos provar que $\overline{AC} = \overline{CB}$.

Mas, $[CM]$ é um lado comum dos triângulos $[AMC]$ e $[BMC]$ e $\overline{AM} = \overline{MB}$, já que M é o ponto médio de $[AB]$.

Usando o Critério LAL provamos que

$$[AMC] \cong [BMC].$$

Logo $\overline{AC} = \overline{BC}$, porque se opõem a ângulos geometricamente iguais, o ângulo $\measuredangle AMC$ e o ângulo $\measuredangle BMC$, respectivamente.

Provemos agora o recíproco, isto é, se C é um ponto do plano equidistante de A e B então CM é a mediatriz de $[AB]$ onde M é o ponto médio de $[AB]$.

Mostremos que a recta CM é perpendicular a $[AB]$.

Ora,

(i) $\overline{AC} = \overline{BC}$, por hipótese;

(ii) $\overline{AM} = \overline{MB}$, porque M é o ponto médio do segmento de recta $[AB]$;

(iii) $[CM]$ é um lado comum aos dois triângulos.

Por (i), (ii) e (iii) concluímos que os triângulos têm, de um para o outro, os três lados iguais, logo aplicando o Critério LLL da igualdade de triângulos, concluímos que estes dois triângulos são geometricamente iguais.

Assim, $A\hat{M}C = B\hat{M}C$, pois em triângulos geometricamente iguais os ângulos que se opõem a lados iguais são geometricamente iguais.

Mas o $\measuredangle\, AMB$ é um ângulo raso.

Então $A\hat{M}C = B\hat{M}C = \dfrac{A\hat{M}B}{2} = 90^{\circ}$.

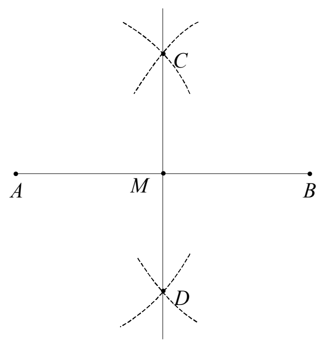
Logo a recta CM é perpendicular ao segmento de recta $[AB]$.

Como CM é perpendicular $[AB]$ e passa no seu ponto médio, M, tem-se que CM é a mediatriz do segmento de recta $[AB]$.

Provámos assim que os pontos do plano equidistantes de A e de B são os pontos da mediatriz de $[AB]$. É esta a proposição que iremos usar na construção que se segue.

1.2.1 Construção da Mediatriz de um Segmento de Recta ([9], página 122)

Dado o segmento de recta $[AB]$, construamos a recta que lhe é perpendicular e que passa no seu ponto médio, M, que iremos também determinar.



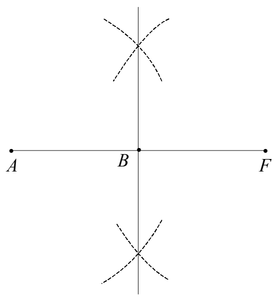
Ora, com centro no ponto A, e raio maior do que metade da medida do comprimento do segmento $[AB]$, traçamos dois arcos de circunferência para um e outro lado do $[AB]$.

De modo análogo, com centro no ponto B e o mesmo raio, traçam-se dois arcos que intersectam os outros dois arcos nos pontos C e D.

Por construção os pontos C e D são equidistantes de A e de B portanto a recta CD é mediatriz de $[AB]$ e o ponto de intersecção de CD com $[AB]$ é o seu ponto médio, M.

Observemos que a construção seguinte é uma consequência da construção anterior.

1.2.2 Construção de uma recta perpendicular a um segmento de recta que passa por um extremo.



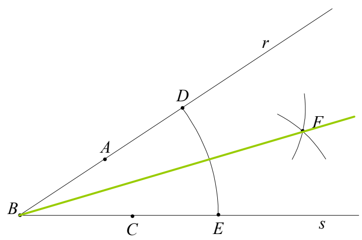
- Prolongamos o segmento de recta $[AB]$ a partir de B.
- Sobre $[AB]$ marcamos um ponto F, tal que $\overline{BF} = \overline{AB}$.
- Com centro em A e em F com o mesmo raio traçamos dois arcos de circunferência que se intersectam.
- Unimos os dois pontos de intersecção dessas circunferências e obtemos a recta perpendicular a $[AB]$ e que passa por B.

1.3 Bissectriz de um Ângulo

<u>Bissectriz de um ângulo</u> é a semi-recta que o divide em dois ângulos geometricamente iguais.

1.3.1 Construção da bissectriz de um ângulo ([9], página122)

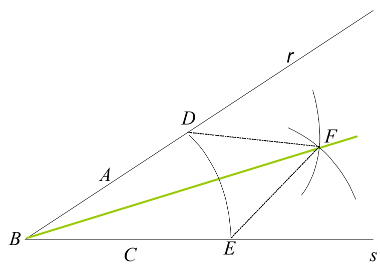
Dado um ângulo, $\measuredangle ABC$, tracemos a sua bissectriz.



- Com centro no vértice B, trace-se um arco de circunferência que intersecte os lados $\dot{B}A$ e $\dot{B}C$ do ângulo $\measuredangle ABC$, respectivamente, nos pontos que denotaremos por D e E.
- Com centros em D e E, tracem-se dois arcos de circunferência, com o mesmo raio (suficientemente grande para que se intersectem).

Denotemos por F o ponto de intersecção destes arcos mais afastado de B.

A semi-recta $\dot{B}F$ é a bissectriz do ângulo $\measuredangle ABC$.



Justifiquemos que $\dot{B}F$ é a bissectriz do ângulo $\measuredangle ABC$.

Tracemos os segmentos de recta $[DF]$ e $[EF]$.

Como $[BD]$ e $[BE]$ são raios de uma circunferência, então

(1) $\overline{BD} = \overline{BE}$.

Por construção vem:

(2) $\overline{DF} = \overline{EF}$;

(3) $[BF]$ é um lado comum dos triângulos $[BDF]$ e $[BEF]$.

Por (1), (2) e (3) tem-se que $[BDF] \cong [BEF]$[8].

Concluindo-se assim que $\measuredangle DBF \cong \measuredangle EBF$, já que em triângulos geometricamente iguais a lados iguais opõem-se ângulos iguais.

Então $\dot{B}F$ é a bissectriz do $\measuredangle ABC$.

Proposição

A bissectriz de um ângulo $\measuredangle ABC$ é o lugar geométrico dos pontos do interior do ângulo equidistantes de $\dot{B}A$ e de $\dot{B}C$.

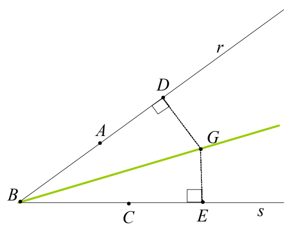
Prova

Iremos provar que:

Todos os pontos da bissectriz são equidistantes de $\dot{B}A$ e de $\dot{B}C$.

Todos os pontos do interior do ângulo equidistantes de $\dot{B}A$ e $\dot{B}C$ pertencem à bissectriz.

Seja G um ponto arbitrário da bissectriz do ângulo $\measuredangle ABC$ e seja D um ponto de $\dot{B}A$ tal que o segmento de recta $[GD]$ é perpendicular a $\dot{B}A$.



De modo análogo, tracemos um segmento perpendicular a $\dot{B}C$ com origem em G e extremidade num ponto de $\dot{B}C$ que denotaremos por E .

Provemos (1), ou seja, que $\overline{GD} = \overline{GE}$.

Ora,

(i) $[BG]$ é um lado do triângulo $[BDG]$ e também é um lado do triângulo $[BGE]$;

(ii) $\dot{B}G$ é a bissectriz do $\measuredangle ABC$ então $G\hat{B}C = G\hat{B}A$;

[8] Critério LLL

(iii) $[GE]$ é perpendicular a $\dot{B}C$ e $[GD]$ é perpendicular a $\dot{B}A$, donde $G\hat{E}B = G\hat{D}B = 90^{\circ}$.

Por (ii) e (iii) podemos concluir que:

(iv) $B\hat{G}D = B\hat{G}E$, porque se dois triângulos têm, de um para o outro, dois ângulos iguais então têm três ângulos iguais[9].

Por (i), (iii) e (iv) temos que os triângulos, $[GDB]$ e $[GBE]$ têm, de um para o outro, um lado e dois ângulos adjacentes a esse lado geometricamente iguais. Aplicando o Critério LAA provamos que os triângulos são geometricamente iguais.

Mas $\overline{GD}$ e $\overline{GE}$ opõem-se a ângulos geometricamente iguais logo $\overline{GD} = \overline{GE}$, como queríamos provar.

Provemos agora (2), isto é, que todos os pontos do interior do ângulo equidistantes de $\dot{B}A$ e $\dot{B}C$ pertencem à bissectriz.

Seja G um ponto do interior do ângulo $\measuredangle ABC$ equidistante de $\dot{B}A$ e $\dot{B}C$. Sejam D e E pontos pertencentes aos lados do ângulo tais que os triângulos $[GDB]$ e $[GBE]$ são rectângulos em D e em E, respectivamente, e têm de um para o outro a hipotenusa e um cateto iguais, pois $\overline{BG}$ (hipotenusa dos triângulos) é um lado comum aos dois triângulos e estamos a supor que $\overline{GD} = \overline{GE}$.

Então $[GDB] \cong [GBE]$ porque são triângulos rectângulos que têm, de um para o outro, um cateto e a hipotenusa geometricamente iguais[10].

Como em triângulos geometricamente iguais a lados geometricamente iguais se opõem ângulos geometricamente iguais, concluímos que $\measuredangle ABG \cong \measuredangle GBC$, isto é, $\dot{B}C$ é a bissectriz do $\measuredangle ABC$.

1.4 Divisão de um segmento em partes iguais ([9], página 122)

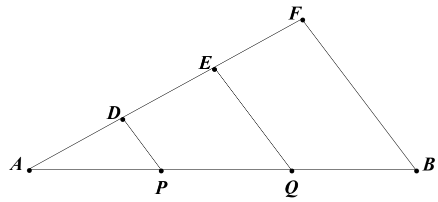
Propomo-nos dividir um segmento de recta dado num determinado número de segmentos congruentes, ou seja, geometricamente iguais.

[9] Corolário do Teorema T1_Resultados preliminares
[10] Teorema T3_Resultados preliminares

Suponhamos que se trata de dividir o segmento $[AB]$ em três partes iguais, isto é, determinemos dois pontos, P e Q, de $[AB]$, tais que:

$$\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB} = \frac{1}{3}\overline{AB}.$$

- Marcamos um ponto D exterior ao segmento de recta $[AB]$ e traçamos a recta AD.
- Com o auxílio do compasso triplicamos $\overline{AD}$ marcando os pontos E e F na recta AD, tais que $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EF}$ e portanto $\overline{AF} = 3\overline{AD}$.



- Em seguida fazemos passar paralelas[11] à recta BF, pelos pontos D e E. Estas rectas intersectam $[AB]$ nos pontos P e Q, respectivamente, que são os pontos procurados.

Justifiquemos que $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB}$.

Os triângulos $[APD]$ e $[ABF]$ são semelhantes, porque têm, de um para o outro, os três ângulos iguais. Pois o ângulo $\measuredangle A$ é comum aos dois triângulos, $A\hat{P}D = A\hat{B}F$ e $A\hat{D}P = A\hat{F}B$, porque são ângulos de lados paralelos.

Como em triângulos semelhantes a ângulos iguais se opõem lados proporcionais podemos concluir que $\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = \frac{1}{3}$.

Analogamente para os triângulos $[AQE]$ e $[ABF]$, temos $\frac{\overline{AQ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{2}{3}$.

1.5 Proporcionalidade ([9], página 123)

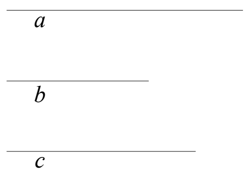
Sejam a, b, c e d as medidas do comprimento de segmentos de rectas.

Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e desconhecemos, por exemplo, d, então para o determinar podemos fazer $d = \frac{b \times c}{a}$, porque as duas igualdades são equivalentes em $\mathbb{R}^+$.

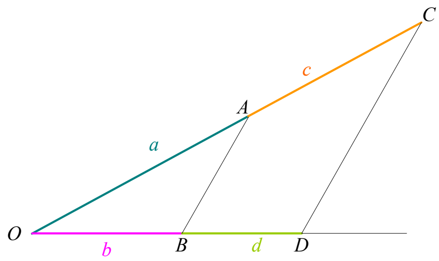
Mas também podemos determinar graficamente a medida do comprimento de d.

[11] Construção 1.1._ página 15

Sejam a, b e c as medidas do comprimento dos segmentos de recta da figura ao lado.



- Sobre um ângulo qualquer de vértice O marcam--se os pontos A, B e C tais que A e C pertençam a um dos lados, B pertença ao outro e $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$ e $\overline{AC}=c$.
- Unimos A e B;
- Por C traçamos um segmento de recta paralelo ao anterior e cujo outro extremo, que denotamos por D está sobre $\dot{OB}$.



Iremos verificar que $\overline{BD}=d$.

Façamos $\overline{BD}=x$.

Os triângulos $[OAB]$ e $[OCD]$ são semelhantes, pois têm três ângulos iguais. Porque o $\measuredangle AOB$ é um ângulo comum aos dois triângulos, e porque ângulos de lados paralelos são geometricamente iguais temos que $\measuredangle OBA \cong \measuredangle ODC$ e $\measuredangle OAB \cong \measuredangle OCD$.

Como os triângulos são semelhantes tem-se que $\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{OB}}{\overline{OD}}$, ou seja, $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{OD}}$.

Donde, $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+x}$.

Mas $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+x} \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{x}$,

pois

$$\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+x}$$

$$\Leftrightarrow a(b+x)=b(a+c)$$

$$\Leftrightarrow ab+ax=ba+bc$$

$$\Leftrightarrow ab+ax=ab+bc$$

$$\Leftrightarrow ax=bc$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{x} \quad \Leftrightarrow x=\frac{b\times c}{a}.$$

Então $x=d$.

1.5.1 A Proporção Áurea ou Proporção Divina

O número de ouro é um número irracional considerado por muitos o símbolo da harmonia. A escola grega de Pitágoras estudou e observou muitas relações e modelos numéricos que apareciam na natureza, beleza estética, harmonia musical e outros, mas provavelmente a mais importante é a razão áurea, a razão divina ou proporção divina. Se quiséssemos dividir um segmento $[AB]$ em duas partes, teríamos uma infinidade de maneiras de o fazer. Existe no entanto uma que parece ser a mais harmoniosa para os nossos sentidos. Relativamente a esta divisão, em 1885, o matemático alemão Zeizing formulou o seguinte princípio.

"Para que um todo dividido em duas partes desiguais pareça belo, do ponto de vista da forma, deve apresentar entre a parte menor e a parte maior a mesma razão que entre esta e o todo."

Segundo este princípio, dado um segmento $[AB]$, um ponto E divide este segmento em duas partes que estão na proporção áurea se $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AE}}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}$ (sendo $\overline{AE}$ a parte maior e $\overline{EB}$ a menor).

A esta razão constante chamamos razão áurea e ao valor desta razão chamamos o número de ouro. Esta razão foi denominada por Euclides por média e extrema razão.

A história deste enigmático número perde-se na antiguidade. No Egipto as pirâmides de Gizé foram construídas tendo em conta a razão áurea: a razão entre a altura de uma face e a metade da base da grande pirâmide é igual ao número de ouro. Também no Papiro de Rhind ou Ahmes se faz referência a uma razão sagrada que se crê ser o número de ouro.

No Partenon Grego construído por volta de 447 a.C. a 433 a.C, tem-se a razão de ouro num rectângulo que contém a fachada, o que revela a preocupação de realizar uma obra bela e harmoniosa. Fídias foi o escultor e arquitecto deste templo e a designação adoptada para o número de ouro é a inicial do nome deste arquitecto – a letra grega ϕ.

Podemos encontrar, ainda, o número de ouro na natureza, em animais (como a concha de Nautilus), flores ou frutos; em figuras geométricas, como pentágonos e decágonos regulares e em poliedros regulares; em inúmeras obras de arte, desde a pintura à arquitectura e até mesmo na música.

Calculemos o valor da razão de ouro.

Seja $\overline{AB}=a$, $\overline{AE}=b$ tais que $a>b$. Façamos $x=\dfrac{a}{b}$ (vem $x>1$).

Da definição de proporção áurea vem que:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{a-b}\,,\ a\neq b$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{a}{b}=\frac{\frac{b}{b}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{b}}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{a}{b}-1}$$

$$\Leftrightarrow\ x=\frac{1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow\ x(x-1)=1$$

$$\Leftrightarrow\ x^2-x-1=0$$

$$\Leftrightarrow\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \ \vee\ \ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

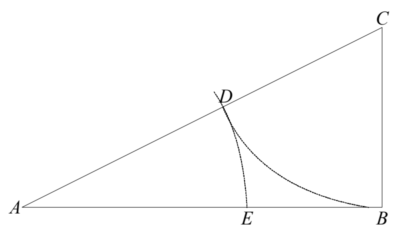
Como $x>1$ tem-se $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

x é o número de ouro, ϕ.

1.5.1.1 *Construção geométrica da proporção áurea* ([9], página 189)

Como dividir o segmento $[AB]$ para que as suas duas partes estejam em proporção áurea?

- Traçamos um segmento $[BC]$ perpendicular[12] ao segmento $[AB]$ de comprimento $\frac{1}{2}\overline{AB}$ (para isso determinamos o ponto médio de $[AB]$);
- com centro em C e raio $\overline{BC}$ traçamos um arco que intersecta $[AC]$ num ponto que denotaremos por D;



- com centro em A e raio $\overline{AD}$, traçamos um arco que intersecta $[AB]$ num ponto que denotaremos por E.

[12] Construção página 18.

Deste modo tem-se que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}$, e esta proporção é, por definição, a proporção áurea.

Demonstremos que a construção geométrica é válida

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\overline{AB} = 1$.

Então $\overline{BC} = \dfrac{1}{2}$ e $\overline{AC}$ será determinado usando o teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \overline{AC} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

O ponto D é marcado por forma que $\overline{CD} = \overline{BC}$, logo $\overline{CD} = \dfrac{1}{2}$.

Donde $\overline{AE} = \overline{AD} = \overline{AC} - \overline{CD} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Temos então a razão

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi.$$

Por outro lado, como $\overline{AB} = 1$ e $\overline{AE} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,

vem

$$\overline{EB} = \overline{AB} - \overline{AE} = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

donde

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)} = \frac{3\sqrt{5}-3+5-\sqrt{5}}{9-5} = \frac{2\sqrt{5}+2}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi.$$

Logo

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \phi.$$

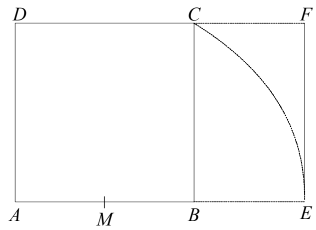
1.5.2 O Rectângulo de Ouro

Rectângulo de Ouro é um rectângulo em que a razão entre o seu comprimento e a sua largura é o número de ouro.

No nosso dia-a-dia, grande parte dos rectângulos que encontramos são rectângulos de ouro, desde bandeiras a jornais, livros, janelas, fotografias e até mesmo cartões de crédito.

1.5.2.1 Construção de um Rectângulo de Ouro usando régua e compasso ([9], página 189)

- Partimos de um quadrado $[ABCD]$.
- Consideramos M o ponto médio de $[AB]$.
- Com centro em M e raio $\overline{MC}$, traçamos um arco que intersecta o prolongamento de $[AB]$ no ponto que denotaremos por E.
- Por E traçamos uma perpendicular a $[AE]$ que intersecta o prolongamento de $[DC]$ no ponto que denotaremos por F.



O rectângulo $[AEFD]$ é um rectângulo de ouro, ou seja, $\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \phi$.

Provemos que de facto $\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \phi$.

Sem perda de generalidade suponhamos que $\overline{AB} = 1$.

Então $\overline{MB} = \frac{1}{2}$,

logo

$$\overline{MC}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2$$

$$\overline{MC}^2 = \frac{1}{4} + 1$$

$$\overline{MC} = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow \overline{MC} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Mas $\overline{MC} = \overline{ME}$, porque são raios da mesma circunferência.

Como $\overline{AE} = \overline{AM} + \overline{ME}$,

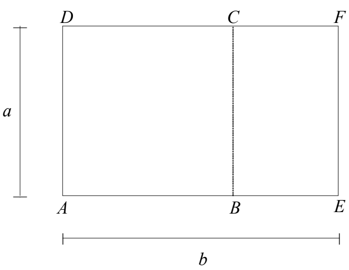
tem-se $\overline{AE} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, donde,

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi.$$

Qualquer rectângulo áureo goza da seguinte propriedade.

"Se a um rectângulo áureo retirarmos um quadrado cujo lado é igual à largura, o rectângulo resultante ainda é áureo."

Prova:



Seja $[ADFE]$ um rectângulo de ouro cuja medida do comprimento do seu lado menor é a e a medida do comprimento do lado maior é b.

O rectângulo obtido após retirarmos o quadrado de lado a, o rectângulo $[BEFC]$, tem lados $b-a$ e a.

Queremos provar que $\frac{a}{b-a} = \frac{\overline{FE}}{\overline{BE}} = \phi$.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $a = 1$.

Anteriormente provámos que nestas condições $\overline{AE} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, ou seja, $\overline{AE} = \phi$.

Então $\overline{BE} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Logo $\frac{\overline{FE}}{\overline{BE}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Donde $\frac{a}{b-a} = \phi$.

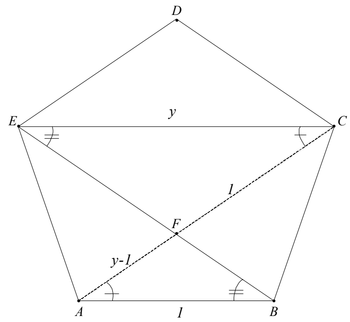
De modo análogo se prova que:

"Se a um rectângulo áureo adicionarmos um quadrado cujo lado é igual ao comprimento, o rectângulo resultante ainda é áureo."

Outra aproximação geométrica à proporção divina pode ser feita através de um pentágono regular.

Seja $[ABCDE]$ um pentágono regular[13].

Suponhamos que $\overline{AB}=1$.



Cada diagonal do pentágono é paralela ao lado oposto[14], por exemplo a diagonal $[AC]$ é paralela ao lado $[DE]$.

Designando por F a intersecção das diagonais $[AC]$ e $[BE]$, $[CDEF]$ é um paralelogramo[15] e como $\overline{CD}=\overline{DE}$, todos os lados de $[CDEF]$ têm comprimento igual a um.

Seja y o comprimento das diagonais de $[ABCDE]$. Assim, $y=\overline{AC}=\overline{BE}=\overline{CE}=\overline{AD}=\overline{BD}$.

Os triângulos $[ABF]$ e $[CEF]$ são semelhantes, porque têm, de um para o outro, os três ângulos geometricamente iguais, pois,

(i) $\measuredangle AFB \cong \measuredangle CFE$, já que são ângulos verticalmente opostos;

(ii) $\measuredangle FAB \cong \measuredangle ECF$ e $\measuredangle FEC \cong \measuredangle ABF$, já que são ângulos de lados paralelos.

Então temos $\frac{y}{1}=\frac{1}{y-1}$ (equação já resolvida anteriormente para a determinação do número de ouro)

e esta equação tem como solução única $y=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, pois $y>0$, como já vimos.

Ou seja, y $=\phi$.

E deste modo concluímos que a medida do comprimento das diagonais de um pentágono é o número de ouro, se tomarmos o lado para unidade.

13 A construção do pentágono regular dado o lado é feita posteriormente neste capítulo.

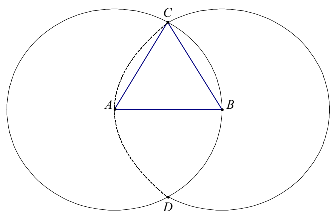
14 Teorema P1_ Resultados preliminares

15 Teorema Q1_ Resultados preliminares

1.6 Construção de Polígonos Regulares

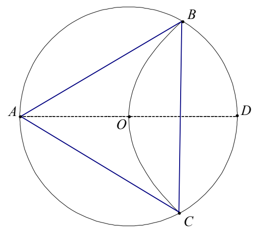
1.6.1 Construção de um Triângulos Equilátero

1.6.1.1 dado o lado.



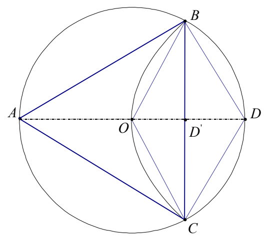
- Tracemos o segmento de recta $[AB]$.
- De seguida, tracemos duas circunferências de centro A e B e raio $\overline{AB}$.
- As circunferências intersectam-se em dois pontos, C e D.
- Unamos os pontos A, B e C.
- Como $\overline{AC} = \overline{AB}$ e $\overline{BC} = \overline{AB}$, então $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AB}$.
- Logo o triângulo $[ABC]$ é equilátero.

1.6.1.2 inscrito numa circunferência.



- Tracemos uma circunferência de centro O e diâmetro $[AD]$.
- Com centro em D tracemos um arco de circunferência de raio $\overline{OD}$.
- Denominemos por B e C os pontos de intersecção deste arco com a circunferência inicial.
- Unindo A, B e C obtemos um triângulo equilátero inscrito numa circunferência.

Justifiquemos que de facto o triângulo $[ABC]$ é equilátero.



Comecemos por provar que $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Por construção $\overline{OB} = \overline{OC} = \overline{BD} = \overline{BC}$, pois são raios de duas circunferências que têm o mesmo raio. Então o quadrilátero $[OBDC]$ é um losango.

Sabemos que as bissectrizes de um losango são perpendiculares entre si e

bissectam-se[16]. Seja D' o ponto de intersecção dessas diagonais.

Então

(i) $A\hat{D}'B = A\hat{D}'C = 90^{\circ}$ e

[16] Teorema Q2_ Resultados preliminares

(ii) $\overline{BD'} = \overline{D'C}$.

Temos também que:

(iii) $\left[AD'\right]$ é um lado comum aos triângulos $\left[AD'B\right]$ e $\left[AD'C\right]$;

Por (i), (ii) e (iii) e usando o critério LAL da igualdade de triângulos vem que:

$$\left[AD'B\right] \cong \left[AD'C\right]$$

Então $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Provemos agora que $\overline{BC} = \overline{AB}$.

Sabemos que os triângulos $[OBD]$ e $[ODC]$ são equiláteros portanto $B\hat{O}D = D\hat{O}C = 60^{\circ}$ e $B\hat{O}C = 120^{\circ}$.

Mas provámos anteriormente que $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Donde $A\hat{O}B = A\hat{O}C = x$, pois numa circunferência a cordas iguais correspondem ângulos ao centro iguais[17].

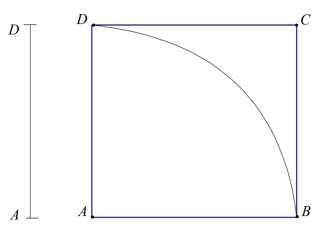
Então,

$$2x + 120^{o} = 360^{o} \Leftrightarrow x = 120^{o}.$$

Como numa circunferência a ângulos iguais correspondem cordas iguais[18], concluímos que $\overline{BC} = \overline{AB}$.

1.6.2 Construção de um Quadrado

1.6.2.1 dado o lado ([9], página 124)



Seja $[AD]$ o segmento de recta dado.

Sobre um dos extremos do segmento $[AD]$, por exemplo A, tracemos uma perpendicular no extremo do segmento[19].

- Tracemos um arco de circunferência com centro em A e raio $\overline{AD}$.
- Seja B o ponto de intersecção do arco anterior com a perpendicular a $[AD]$.

---

[17] Teorema C1_ Resultados preliminares

[18] Teorema C1_Resultados preliminares

[19] Construção página 18.

- Agora, com centro em B e D e raio $\overline{AD}$ voltamos a traçar arcos que se intersectam num ponto, seja ele C .
- Unindo os pontos A, B, C e D, obtemos um quadrado.

Justifiquemos que $[ABCD]$ é um quadrado.

Temos então que provar:

(i) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$;

(ii) $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^{\text{o}}$.

Ora, (i) verifica-se por construção da própria figura, pois tomámos sempre como raio das circunferências $\overline{AD}$.

Provemos agora (ii), isto é, que todos os ângulos são rectos.

(1) o ângulo $\measuredangle DAB$ é recto porque, por construção, $AD \perp AB$.

Os triângulos $[ABD]$ e $[BCD]$ são geometricamente iguais porque têm, de um para o outro, três lados iguais[20].

Logo, os seus ângulos correspondentes são iguais.

Então $D\hat{A}B = B\hat{C}D$.

Por construção

(1) $D\hat{A}B = 90^{\text{o}}$

logo,

(2) $B\hat{C}D = 90^{\text{o}}$.

Como os triângulos $[ABD]$ e $[BCD]$ são isósceles, então os ângulos da base são iguais e como são rectângulos em A e C , respectivamente, os ângulos da base medem 45º.

Donde

(3) $A\hat{B}C = A\hat{B}D + C\hat{B}D = 45^{\text{o}} + 45^{\text{o}} = 90^{\text{o}}$.

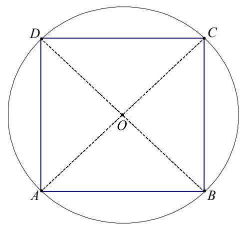
De igual modo,

(4) $A\hat{D}C = A\hat{D}B + B\hat{D}C = 45^{\text{o}} + 45^{\text{o}} = 90^{\text{o}}$.

Por (1), (2), (3) e (4) provamos (ii).

[20] é comum e os outros dois lados são iguais por construção

1.6.2.2 inscrito numa circunferência



- Tracemos o diâmetro $[AC]$ e, em seguida, construímos o diâmetro $[BD]$, tal que $AC \perp BD$.
- Traçando as cordas $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ e $[DA]$, obtém-se o quadrado pedido.

Justifiquemos que o polígono assim construído é um quadrado.

Como $AC \perp BD$, tem-se

$$A\hat{O}B = B\hat{O}C = C\hat{O}D = A\hat{O}D = 90^{o}$$

Mas na mesma circunferência, ou em circunferências iguais, a ângulos ao centro iguais correspondem cordas iguais[21], logo $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AB}$.

Provemos agora que $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^{o}$.

Se provarmos que $B\hat{A}C + C\hat{A}D = 90^{o}$, provamos que o ângulo $\measuredangle\, BAD$ é recto.

Ora, o triângulo $[AOB]$ é rectângulo em O e é isósceles, pois dois dos seus lados são raios da circunferência. Como num triângulo a lados iguais se opõem ângulos iguais tem-se que $B\hat{A}C = A\hat{B}D$.

Mas a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º,

logo

(1) $B\hat{A}C = 45^{o}$ e (2) $A\hat{B}D = 45^{o}$.

De modo análogo prova-se que:

(3) $C\hat{A}D = 45^{o}$ e (4) $A\hat{D}B = 45^{o}$.

(5) $B\hat{D}C = 45^{o}$ e (6) $D\hat{C}A = 45^{o}$.

(7) $A\hat{C}B = 45^{o}$ e (8) $C\hat{B}D = 45^{o}$.

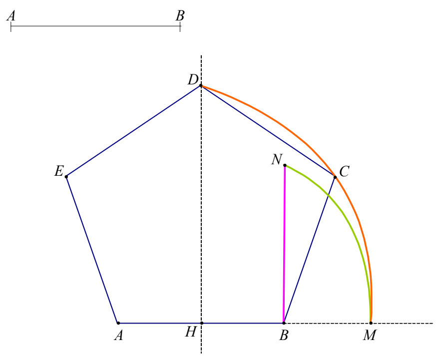
Por (1) e (3) concluímos que $B\hat{A}D = 90^{o}$.

Do mesmo modo se prova que os outros três ângulos são ângulos rectos.

[21] Teorema C1_ Resultados preliminares

1.6.3 Construção de um Pentágono Regular

1.6.3.1 dado o lado ([9], página 189)



- Dado um segmento de recta $[AB]$, tracemos a sua mediatriz.
- A partir do extremo B traça-se um segmento de recta perpendicular a $[AB]$ cuja medida do comprimento é igual a $\overline{AB}$. Seja $\overline{BN}$.
- Com centro em H, ponto médio de, $[AB]$ e com raio $\overline{NH}$ traça-se um arco que intersecta o prolongamento de $[AB]$ num ponto que denotamos por M.
- Com centro em A e raio igual a $\overline{AM}$, desenha-se um arco que intersecta a mediatriz inicial num ponto que denotamos por D.
- Este ponto é o vértice do pentágono, oposto ao lado dado.
- Sucessivos arcos com origem em vértices conhecidos e raios iguais ao lado dado definirão C e E.
- C é o ponto que resulta da intersecção da circunferência de centro B e raio $\overline{AB}$ com a circunferência de centro D e com o mesmo raio.
- De modo análogo, tem-se que E é o ponto que resulta da intersecção das circunferências de centros A e D e raio $\overline{AB}$.

Justifiquemos que o polígono $[ABCDE]$ é um pentágono regular.

Por construção,

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{AE},$$

logo o polígono tem os lados todos iguais.

Provemos, agora que todos os ângulos do pentágono são geometricamente iguais.

Sabemos que D é um ponto da mediatriz de $[AB]$, então D está à mesma distância de A e de B.

Ou seja, $\overline{AD} = \overline{BD}$, logo o triângulo $[ABD]$ é isósceles.

Mas num triângulo isósceles os ângulos da base são iguais, donde

(i) $B\hat{A}D = A\hat{B}D$.

Determinemos a amplitude de um destes ângulos, por exemplo do ângulo $\measuredangle ABD$.

Ora, $\cos\left(A\hat{B}D\right) = \dfrac{\overline{BH}}{\overline{BD}}$

Determinemos $\overline{BH}$ e $\overline{BD}$.

Como o triângulo $[HBN]$ é rectângulo em B, tem-se $\overline{HN}^2 = \overline{HB}^2 + \overline{BN}^2$.

Sem perda de generalidade, consideremos $\overline{AB} = 1$.

Então $\overline{HB} = \dfrac{1}{2}$ e $\overline{BN} = \overline{AB} = 1$.

Donde $\overline{HN}^2 = \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{5}{4} \Rightarrow \overline{HN} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Por construção $\overline{AD} = \overline{AM}$ e $\overline{HN} = \overline{HM}$.

Sendo $\overline{AM} = \overline{AH} + \overline{HM}$ vem:

$\overline{AM} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Como $\overline{AD} = \overline{BD}$ tem-se $\overline{BD} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

Então $\cos\left(A\hat{B}D\right) = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}+1}$

Ou seja, $\cos\left(A\hat{B}D\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

Sabemos que [22] $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ e a função co-seno é injectiva em $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, logo $A\hat{B}D = \dfrac{2\pi}{5}$.

Então,

(i) $B\hat{A}D = A\hat{B}D = \dfrac{2\pi}{5} = 72^{\circ}$

[22] Anexo I

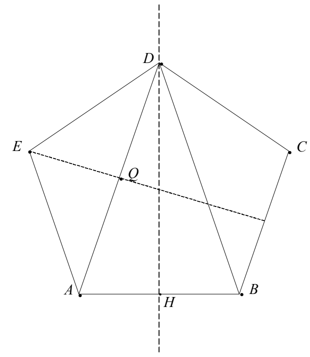
Por (i) e porque a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, tem-se que

$A\hat{D}B = 180° - 72° - 72°$, isto é,

(ii) $A\hat{D}B = 36°$

Determinemos $D\hat{A}E$.

Seja Q o ponto médio de $[AD]$.



Como o triângulo $[EQA]$ é rectângulo[23] $\cos\left(D\hat{A}E\right) = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AE}}$.

Mas $\overline{AQ} = \dfrac{\overline{AD}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ e $\overline{AE} = 1$ por hipótese,

então $\cos\left(D\hat{A}E\right) = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Sabemos que [24] $\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ e a função co-seno é injectiva em $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

logo

(iii) $D\hat{A}E = \dfrac{\pi}{5} = 36°$

Por (i) e (iii) concluímos

(1) $E\hat{A}B = 72° + 36° = 108°$.

Determinemos $A\hat{E}D$.

$A\hat{Q}E = 90°$ e $Q\hat{A}E = 36°$,

logo

(iv) $A\hat{E}Q = 180° - 90° - 36° = 54°$.

Como os triângulos $[AEQ]$ e $[DEQ]$ são geometricamente iguais, pois têm, de um para o outro, os lados iguais, podemos concluir que:

(v) $E\hat{D}Q = E\hat{A}Q = 36°$ e

(vi) $D\hat{E}Q = A\hat{E}Q = 54°$.

Por (iv) e (vi) tem-se:

(2) $A\hat{E}D = 54° + 54° = 108°$.

---

23 Teorema T4_ Resultados preliminares

24 Anexo I.

Temos também que os triângulos $[AED]$ e $[BCD]$ são geometricamente iguais, pois têm, de um para o outro, os lados iguais. De modo análogo, podemos concluir que:

(3) $B\hat{C}D = A\hat{E}D = 108^{\circ}$

(4) $A\hat{B}C = A\hat{B}D + C\hat{B}D$

$= B\hat{A}D + 36^{\circ}$

$= 72^{\circ} + 36^{\circ}$, por (i)

$= 108^{\circ}$

Por último, sendo:

$E\hat{D}Q = 36^{\circ}$, por (v)

$A\hat{D}B = 36^{\circ}$, por (i)

$B\hat{D}C = 36^{\circ}$, pois $B\hat{D}C = A\hat{D}C$, porque $[AED] \cong [BCD]$, vem

(5) $E\hat{D}C = 36^{\circ} + 36^{\circ} + 36^{\circ} = 108^{\circ}$.

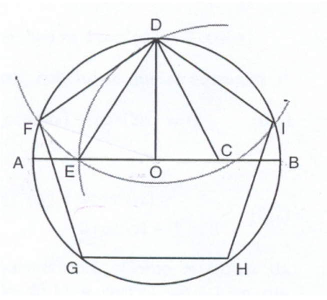
E portanto por (1), (2), (3), (4) e (5) concluímos que os ângulos do pentágono são todos iguais.

1.6.3.2 inscrito numa circunferência [11]

Cláudio Ptolomeu[25] descreveu uma elegante construção do pentágono regular inscrito numa circunferência, na qual afirma que os comprimentos dos lados do pentágono, do hexágono e do decágono regulares inscritos numa mesma circunferência, são os comprimentos dos lados de um certo triângulo rectângulo.

A construção é a seguinte:

- O ponto O é o centro da circunferência considerada e $[AB]$ um seu diâmetro;
- C é o ponto médio de $[OB]$;
- o ponto D obtém-se traçando $[OD]$ perpendicularmente a AB;
- o ponto E pertence a $[OA]$ e verifica $\overline{CE} = \overline{CD}$.
- o ponto F está sobre a circunferência e $\overline{DF} = \overline{DE}$.



[25] Cláudio Ptolomeu nasceu no início do século II da era cristã em Ptololemaida, Hérmia (colónia grega do Egipto). A principal obra do autor foi He mathematike syntaxis (A colecção matemática), dividida em 13 livros, constitui a síntese dos resultados obtidos pelos astrónomos gregos da antiguidade e é a principal fonte de conhecimento a respeito do trabalho de Hiparco, considerado o maior astrónomo da antiga Grécia.

Os comprimentos dos lados do triângulo rectângulo $[DOE]$, $\overline{DE}$, $\overline{DO}$ e $\overline{EO}$, são, respectivamente, os comprimentos dos lados do pentágono, do hexágono e do decágono regulares inscritos na circunferência.

Iremos apenas provar para o caso do pentágono e do decágono, pois para o caso do hexágono já foi provado nos Resultados Preliminares[26].

Demonstraremos que $\overline{DF}$ é o comprimento do lado do pentágono provando que $D\hat{O}F = \frac{2\pi}{5}$ radianos e que $\overline{EO}$ é a medida do comprimento do lado de um decágono regular provando que $D\hat{O}J = \frac{\pi}{5}$ radianos, sendo J um ponto da circunferência tal que $\overline{EO} = \overline{DJ}$.[27]

A – Provemos que $\overline{DF}$ é a medida do comprimento do lado do pentágono.

Comecemos por determinar $D\hat{O}F$.

Sabemos, por definição de produto interno, que

$$\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OD} = \left\|\overrightarrow{OF}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OD}\right\| \times \cos D\hat{O}F .$$

Mas $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{DO}$, isto é, $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD}$

Então,

$$\left\|\overrightarrow{DF}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD}\right\|^2$$

$$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{DF}\right\|^2 = \left(\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD}\right).\left(\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{DF}\right\|^2 = \overrightarrow{OF}.\left(\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD}\right) - \overrightarrow{OD}.\left(\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{DF}\right\|^2 = \overrightarrow{OF}.\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OF}.\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OD}$$

$$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{DF}\right\|^2 = \overrightarrow{OF}.\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OF}.\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OF}.\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OD}$$

$$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{DF}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{OF}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{OD}\right\|^2 - 2\overrightarrow{OF}.\ \overrightarrow{OD}$$

$$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{DF}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{OF}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{OD}\right\|^2 - 2\left\|\overrightarrow{OF}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OD}\right\| \times \cos D\hat{O}F \quad (1)$$

Calculemos $\left\|\overrightarrow{OD}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{OF}\right\|$ e $\left\|\overrightarrow{DF}\right\|$.

[26] Teorema P2_ Resultados preliminares

[27] Teorema C1_ Resultados preliminares

Sem perda de generalidade consideremos $r=1$.

Tem-se sucessivamente que:

$\left\|\overrightarrow{OD}\right\|=\overline{OD}=1$ e $\left\|\overrightarrow{OF}\right\|=\overline{OF}=1$, pois são raios da circunferência de centro O e raio $r=1$.

Cálculo de $\left\|\overrightarrow{DF}\right\|$:

$\overline{DF}=\overline{DE}$, porque são raios da mesma circunferência.

Determinemos $\overline{DE}$.

$\overline{DE}^2=\overline{OD}^2+\overline{EO}^2$

$\Leftrightarrow\ \overline{DE}^2=1^2+\overline{EO}^2$, porque $\overline{OD}=1$.

Mas $\overline{EO}=\overline{CE}-\overline{CO}$.

$\overline{CO}=\frac{1}{2}$, pois $\overline{OB}=1$ e C é o ponto médio de $[OB]$

e $\overline{CE}=\overline{CD}$ é tal que

$\overline{CD}^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2 \Leftrightarrow \overline{CD}^2=\frac{1}{4}+1 \Rightarrow \overline{CD}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Então $\overline{EO}=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Logo,

$$\overline{DE}^2=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+1^2$$

$$\Leftrightarrow\ \overline{DE}^2=\frac{\left(\sqrt{5}\right)^2-2\sqrt{5}+1}{4}+1$$

$$\Leftrightarrow\ \overline{DE}^2=\frac{5-2\sqrt{5}+5}{4}$$

$$\Rightarrow\ \overline{DE}=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}}$$

$$\Leftrightarrow\ \overline{DE}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$$

Então $\left\|\overrightarrow{DF}\right\|=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$ (2)

Substituindo em (1)

$\left\|\overrightarrow{DF}\right\|^2 = \overline{DF}^2$ por $\frac{10-2\sqrt{5}}{4}$

$\left\|\overrightarrow{OF}\right\|^2 = \overline{OF}^2$ e $\left\|\overrightarrow{OD}\right\|^2 = \overline{OD}^2$ por 1,

vem

$$\frac{10-2\sqrt{5}}{4} = 1+1-2\times1\times1\times\cos D\hat{O}F$$

$$\frac{10-2\sqrt{5}}{4} = 2-2\cos D\hat{O}F$$

$$10-2\sqrt{5} = 8-8\cos D\hat{O}F$$

$$8\cos D\hat{O}F = 8-10+2\sqrt{5}$$

$$\cos D\hat{O}F = \frac{-2+2\sqrt{5}}{8}$$

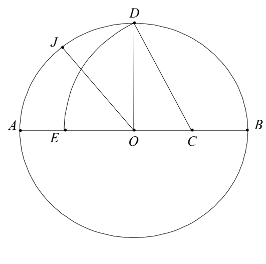
$$\cos D\hat{O}F = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Como a função co-seno é injectiva no intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ e provámos que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ tem-se que $D\hat{O}F = \frac{2\pi}{5}$ radianos, pelo que $\overline{DF}$ é o comprimento do lado do pentágono regular inscrito na circunferência.

B – Provemos agora que $\overline{EO}$ é a medida do comprimento do lado de um decágono regular.

Usando um raciocínio análogo ao anterior, tem-se que $\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OD}$.

Então



$$\left\|\overrightarrow{DJ}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OD}\right\|^2$$

$$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{DJ}\right\|^2 = \left(\overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OD}\right).\left(\overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OD}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{DJ}\right\|^2 = \overrightarrow{OJ}.\overrightarrow{OJ} - 2\times\overrightarrow{OJ}.\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OD}$$

$$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{DJ}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{OJ}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{OD}\right\|^2 - 2\times\overrightarrow{OJ}.\ \overrightarrow{OD}$$

$$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{DJ}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{OJ}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{OD}\right\|^2 - 2\times\left\|\overrightarrow{OJ}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OD}\right\|\times\cos D\hat{O}J.$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que $r = \overline{OJ} = 1$ então $\overline{OD} = \overline{OJ} = 1$.

Logo

$\left\|\overline{DJ}\right\|^2 = 1^2 + 1^2 - 2\times 1\times 1\times \cos D\hat{O}J \Leftrightarrow \left\|\overline{DJ}\right\|^2 = 2 - 2\times \cos D\hat{O}J$ (1)

Determinemos $\left\|\overline{DJ}\right\|^2$.

Por construção $\overline{DJ} = \overline{EO}$ e por hipótese $\overline{CE} = \overline{CD}$.

Então, como $\overline{CD} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ e $\overline{OC} = \frac{1}{2}$ tem-se que $\overline{EO} = \overline{CD} - \overline{OC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Donde

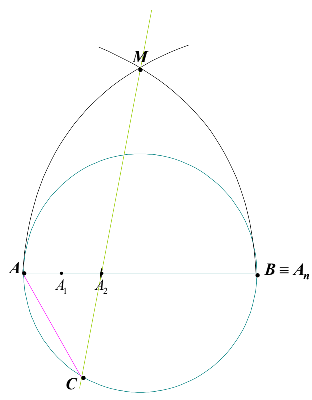
$$\left\|\overline{DJ}\right\|^2 = \overline{DJ}^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Logo (1) é equivalente a:

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} = 2 - 2\times \cos D\hat{O}J \Leftrightarrow \cos D\hat{O}J = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Como a função co-seno é injectiva no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e provámos que $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ tem--se que $D\hat{O}J = \frac{\pi}{5}$ radianos, pelo que $\overline{EO} = \overline{DJ}$ é a medida do comprimento do lado do decágono regular inscrito na circunferência.

1.6.4 Método geral para a construção de um polígono regular inscrito numa circunferência



- Traça-se uma circunferência e divide-se um seu diâmetro, $[AB]$, em tantas partes iguais quantos os lados do polígono a construir[28].
- Com centro em A e em B e raio $\overline{AB}$, desenhamos dois arcos que se encontram num ponto que denotaremos por M.
- Unimos M com o segundo ponto da divisão do segmento a contar de A (sempre com o segundo independentemente do número de lados) e prolonga--se essa linha até que intersecte a circunferência num ponto que denotaremos por C.

[28] Processo descrito em 1.4.

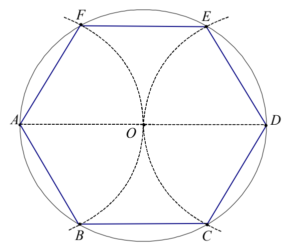
- $[AC]$ é o lado do polígono que servirá de base para, com a ajuda do compasso, marcarmos os outros vértices ao longo da circunferência.

Será que o método é rigoroso para todos os polígonos?

Iremos verificar que não. Vejamos a construção rigorosa de dois polígonos regulares, o hexágono e o octógono e façamos a comparação com a construção por este método. No Anexo II está feito estudo para outros polígonos regulares: o triângulo, o quadrado, o pentágono, o heptágono e o eneágono.

a) O Hexágono

Queremos construir o hexágono regular $[ABCDEF]$, inscrito na circunferência de centro O e diâmetro $[AD]$.



Com centro em A tracemos um arco de circunferência de raio $\overline{OA}$. Denotemos por F e B os pontos de intersecção deste arco com a circunferência inicial.

De modo análogo, com centro em D tracemos um arco de circunferência de raio $\overline{OA}$.

Denotemos por C e E os pontos de intersecção deste arco com a circunferência inicial.

Os pontos A, B, C, D, E e F são os vértices de um hexágono regular inscrito na circunferência, pois por construção tem-se que $\overline{AB} = \overline{AF} = \overline{ED} = \overline{DC}$.

Provemos que $\overline{BC}$ e $\overline{FE}$ são iguais, por exemplo, a $\overline{AB}$.

Ora, $[AD]$ é um diâmetro da circunferência então $A\hat{O}D = 180º$.

Como os triângulos $[AOB]$ e $[OCD]$ são equiláteros tem-se que $A\hat{O}B = 60º = C\hat{O}D$,logo $B\hat{O}C = 60º$.

Donde $\overline{BC} = \overline{AB}$, já que numa circunferência a ângulos ao centro iguais correspondem cordas iguais.

De modo análogo se prova que $\overline{FE} = \overline{AB}$.

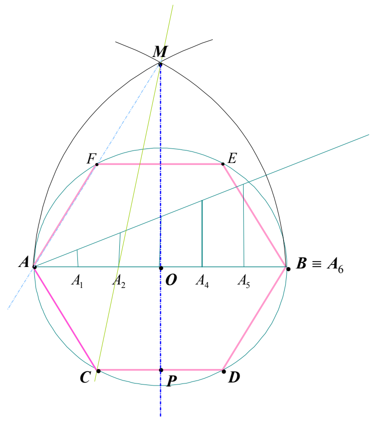
Provemos agora que os ângulos são todos iguais.

Podemos decompor este hexágono em seis triângulos equiláteros, pois o lado de um hexágono inscrito numa circunferência é igual ao seu raio[29].

Cada ângulo destes triângulos mede 60º, então cada ângulo do hexágono mede $60^{o}+60^{o}=120^{o}$.

Provámos que é possível desenhar rigorosamente com régua não graduada e compasso, um hexágono regular.

Tracemos agora um hexágono regular usando o método geral para traçar polígonos regulares e mostremos que no caso do hexágono o método geral é rigoroso.



Para tal mostraremos que a recta A_2M coincide com MC, mostrando que A_2 está sobre a recta MC, onde C é um ponto da circunferência tal que $[ACDBEF]$ é um hexágono regular previamente inscrito.

Ao dividir o diâmetro $[AB]$ em partes iguais vem $A_3 \equiv O$ centro da circunferência na qual o polígono está inscrito.

Tracemos as semi-rectas $\dot{M}P$ e $\dot{M}A$, onde P é o ponto médio de $[CD]$.

Seja α a amplitude do ângulo $\measuredangle CMP$ e β a amplitude do ângulo $\measuredangle A_2MP$.

Por construção $\overline{AM}=\overline{AB}$.

Como nos hexágonos o lado é igual ao raio da circunferência circunscrita[30], $\overline{AC}=\overline{AO}$.

Sem perda de generalidade, consideremos $r=1$.

Determinemos:

(1) $\overline{OM}$

$\overline{OM}^2+\overline{AO}^2=\overline{AM}^2$

$\overline{OM}^2+1^2=4$, porque $\overline{AM}=\overline{AB}$ por construção.

$\overline{OM}^2=3$

$\overline{OM}=\sqrt{3}$

[29] Teorema P2_ Resultados preliminares
[30] Teorema P2_ Resultados preliminares

(2) $\overline{CP} = \frac{1}{2}$, pois sabemos que o lado de um hexágono regular inscrito numa circunferência é igual ao seu raio.

(3) $\overline{OP}$

$$\overline{OP}^2 + \overline{CP}^2 = r^2$$

$$\overline{OP}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$$

$$\overline{OP}^2 + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \overline{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por um lado tem-se que $tg\alpha = \frac{\overline{CP}}{\overline{PM}}$, mas

(4) $\overline{PM} = \overline{OM} + \overline{OP}$,

$$\overline{PM} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{PM} = \frac{3}{2}\sqrt{3},$$

então $tg\alpha = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{3}}$,

donde,

(i) $tg\alpha = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

Mas por outro lado, $tg\beta = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OM}}$.

Como $\overline{OA_2} = \frac{1}{3}$ e $\overline{OM} = \sqrt{3}$,

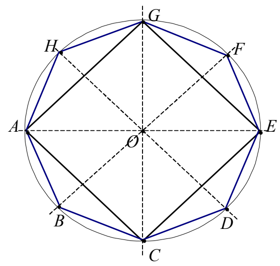
tem-se

(ii) $tg\beta = \dfrac{\frac{1}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

Por (i) e (ii) e porque os ângulos são ambos agudos concluímos $\alpha = \beta$, portanto o método é rigoroso no caso dos hexágonos.

b) O Octógono

Construa-se o octógono $[ABCDEFGH]$ inscrito numa circunferência de centro O e diâmetro $[AE]$:



- Tracemos a mediatriz de $[AE]$. Denotemos por C e G os pontos de intersecção desta mediatriz com a circunferência inicial.
- De modo análogo tracemos as mediatrizes dos segmentos $[AG]$ e $[GE]$.

Denotemos por H e D os pontos de intersecção da circunferência inicial com a mediatriz de $[AG]$ e por B e F os da mediatriz de $[GE]$.

Tracemos as cordas $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$, $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$ e $[HA]$ obtém-se o octógono pedido.

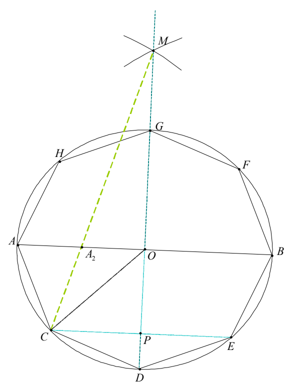
De facto este octógono é regular.

Pois tem os lados e os ângulos todos iguais.

Tem os lados iguais porque sendo $[ACEG]$ um quadrado[31] e DH e FB as mediatrizes dos lados do quadrado, estas mediatrizes dividem os quatro ângulos ao centro do quadrado em oito ângulos ao centro iguais, de 45º. Como a ângulos ao centro iguais correspondem cordas iguais concluímos que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HA}$, ou seja o polígono tem os lados iguais.

Os oito ângulos do polígono são iguais e iguais a $\frac{270^{\circ}}{2} = 135^{\circ}$, pois a amplitude de ângulos inscritos numa circunferência é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados[32].

Construa-se o octógono regular usando o método geral.



[31] Ver construção de um quadrado dado o lado, página 30

[32] Teorema C2_ Resultados preliminares

Seja, por outro lado, $[ACDEBFGH]$ um octógono regular previamente inscrito na circunferência de centro O e diâmetro $[AB]$ (pelo processo rigoroso que, por exemplo, acabámos de descrever).

Iremos provar que no caso da construção do octógono regular este método não é rigoroso, mostrando que A_2 não está na recta CM. Ou seja, os ângulos $\alpha = C\hat{M}P$ e $\beta = A_2\hat{M}O$ não coincidem, onde P é o ponto médio do segmento de recta $[CE]$.

Sem perda de generalidade considere-se $r = 1$

Por um lado tem-se que:

(i) $tg\ \alpha = \dfrac{\overline{CP}}{\overline{MP}}$,

e por outro,

(ii) $tg\ \beta = \dfrac{\overline{OA_2}}{\overline{OM}}$.

Como $\overline{OM}$ não depende do número de partes em que o diâmetro é dividido tem-se, como vimos anteriormente, $\overline{OM} = \sqrt{3}$.

Sabemos que $A\hat{O}C = \dfrac{360^{\circ}}{8} = 45^{\circ}$ e que os ângulos $\measuredangle\, AOC$ e $\measuredangle\, OCP$ são geometricamente iguais, pois são ângulos de lados paralelos[33].

Então $O\hat{C}P = 45^{\circ}$.

Mas

(iii) $A\hat{O}P = 90^{\circ}$ e $A\hat{O}C = 45^{\circ}$,

logo

(iv) $C\hat{O}P = 45^{\circ}$.

Donde por (iii) e (iv) o triângulo $[COP]$ é isósceles, pois num triângulo a ângulos iguais opõem-se lados iguais[34].

E deste modo podemos concluir que $\overline{OP} = \overline{CP}$.

Determinemos a medida do seu comprimento.

$\overline{OP}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{CO}^2$.

Seja $\overline{OP} = \overline{CP} = x$,

---

[33] $CE\,//\,AB$ porque MO é a mediatriz de $[AB]$ e $[CE]$, logo perpendicular a $[CE]$ e $[AB]$.

[34] Teorema 4.1._Resultados preliminares

então tem-se

$$2x^2 = 1^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ou seja, $\overline{OP} = \overline{CP} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Temos então que:

$$\overline{MP} = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{2}} \text{ e } \overline{CP} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Logo vem

$$tg\alpha = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{6}+1} = \frac{\left(\sqrt{6}-1\right)}{6-1} = \frac{\sqrt{6}-1}{5}.$$

Por outro lado, $tg\beta = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{MO}}$ e $\overline{OA_2} = \frac{1}{2}$, isto é,

$$tg\beta = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Se o método fosse rigoroso teríamos $tg\alpha = tg\beta$, ou seja $tg\beta = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OM}}$ seria $\frac{\sqrt{6}-1}{5}$, o que não acontece.

Pois $\frac{\sqrt{6}-1}{5} = \frac{6\sqrt{6}-6}{30}$ e $\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{30}$.

Como $6\sqrt{6}-6 \neq 5\sqrt{3}$ então $\alpha \neq \beta$.

Portanto $A_2 \notin MC$.

Observe-se, no entanto, que o erro é muito pequeno e não depende de r, $\frac{\sqrt{6}-1}{5} \simeq 0,2898$ e $\frac{\sqrt{3}}{6} \simeq 0,2886$. Então $\alpha \simeq 16,1615$ e $\beta \simeq 16,0981$ logo $|\alpha - \beta| \simeq 0,0634$.

1.6.5 Polígonos Regulares que podemos construir com régua não graduada e compasso

Em geral, quando falamos em construções geométricas planas ou polígonos construtíveis estamos a referir-nos exclusivamente a construções com régua não graduada e compasso.

Durante o século XIX fizeram-se várias investigações na tentativa de determinar e caracterizar quais são as construções possíveis e impossíveis de se fazer utilizando somente a régua não graduada e o compasso. Estas investigações deram origem a considerações de grande interesse matemático e destas investigações destaca-se um resultado que permite determinar quais são os polígonos construtíveis. Esta condição necessária e suficiente deveu-se essencialmente ao grande matemático C. F. Gauss[35] e diz o seguinte:

> Um polígono regular de n lados pode ser construído com régua e compasso se, e somente se, ou $n=2^{\alpha}$ ou $n=2^{\alpha}\cdot p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_r$, onde $p_1, p_2, p_3, \ldots p_r$ são números primos distintos da forma $p=2^{2^{\beta}}+1$ e $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0$.

Então a partir desta condição, podemos saber quais são os polígonos construtíveis.

O facto de podermos construir um polígono com n lados, sendo $n=2^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{N}_0$ é fácil de compreender, pois se pudermos construir um certo polígono regular, podemos também construir um com duas vezes este número de lados, basta dividir ao meio todos os arcos da circunferência circunscrita ao polígono.

Vejamos agora o que significa poder construir todos os polígonos cujo número de lados é $n=2^{\alpha}\cdot p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_k$, sendo os p_i primos da forma $p_i=2^{2^{r_i}}+1$, com $r_i\in\mathbb{N}_0$.

Os números primos desta forma já eram famosos antes que Gauss descobrisse o seu papel no problema da construção de polígonos. Estes primos são chamados Primos de Fermat, devido ao Matemático francês Pierre de Fermat (1601-1665), o fundador da moderna Teoria dos Números, que conjecturou que qualquer número desta forma é um número primo.

Quando r_i toma os valores 0, 1, 2, 3 e 4 obtemos os seguintes Primos de Fermat:

$$p_0=2^{2^0}+1=3$$

$$p_1=2^{2^1}+1=5$$

$$p_2=2^{2^2}+1=17$$

$$p_3=2^{2^3}+1=257$$

$$p_4=2^{2^4}+1=65537.$$

---

[35] C. F. Gauss nasceu a 30 de Abril de 1777, em Brunswich, na Alemanha e morreu a 23 de Fevereiro de 1855, em Göttingen, na Alemanha. A sua precoce paixão pelos números e cálculos estendeu-se à Teoria dos Números, à Álgebra, à Análise, à Geometria, à teoria das Probabilidades e à Teoria dos Erros. Ao mesmo tempo, levou em frente uma intensiva pesquisa empírica e teórica em muitos outros ramos, incluindo Astronomia Observacional, Mecânica Celeste, levantamento topográfico, Geodesia, Geomagnetísmo, Electromagnetísmo e Mecanismos Ópticos.

Estes números na verdade são primos. Mas em 1735 Euler[36] descobriu que $p_5 = 2^{2^5} + 1 = 641 \times 6\,700417$ não é primo.

Até hoje ainda não foram descobertos mais Primos de Fermat, além dos cinco que vimos anteriormente, p_0, p_1, p_2, p_3 e p_4.

Mas então que polígonos regulares são construtíveis?

Segundo o Teorema de Gauss todo o polígono de n-lados, tal que $n = 2^\alpha$ e $n = 2^\alpha \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_k$ onde os p_i são Primos de Fermat.

Ora, vejamos os seguintes exemplos.

Se:

- $n = 3$ tem-se que $3 = 2^0 . p_0$, logo construtível;
- $n = 4$ tem-se que $4 = 2^2$, logo construtível;
- $n = 5$ tem-se que $5 = 2^0 . p_1$, logo construtível;
- $n = 6$ tem-se que $6 = 2^1 . p_0$, logo construtível;
- $n = 7$, não pode ser escrito como potência de 2 nem como produto de uma potência de 2 por um ou mais Primos de Fermat.

A demonstração do Teorema enunciado anteriormente é complexa e sai do âmbito deste trabalho. É no entanto útil chamar a atenção para o facto de Gauss se ter apercebido da ligação existente entre o problema geométrico de dividir um círculo em n partes iguais e o problema algébrico de resolver a equação $x^n = 1$.

Com efeito, as n raízes desta equação, quando marcadas no plano complexo, formam os vértices de um polígono regular de n-lados inscritos num círculo unitário.

Provemos este facto. ([10], página 103)

Como todas as raízes índice n de um número complexo $z = \rho\, cis\, \theta$, $z \neq 0$, têm o mesmo módulo $\sqrt[n]{\rho}$, elas pertencem à mesma circunferência de centro O e raio $\sqrt[n]{\rho}$.

[36] Leonhard Euler nasceu em Basileia a 15 de Abril de 1707 e morreu em São Petersburgo a 18 de Setembro de 1783 foi matemático e físico. O pai, o pastor alvinista Paul Euler, desprezando o seu prodigioso talento matemático, determinou que ele estudaria Teologia e seguiria a carreira religiosa. Daniel e Nicolaus Bernoulli convenceram o pai de Euler a permitir que seu filho trocasse o hábito pela matemática. Desde 1727, leccionou Física e Matemática na Academia de São Petersburgo. Em1741, foi chamado por Frederico II para a Academia de Ciências de Berlim. Regressou à Rússia em 1766, tendo cegado pouco depois. No entanto, continuou a sua actividade científica que abarcava a Matemática Pura e Aplicada, a Física e a Astronomia. Durante sua vida resolveu enorme quantidade de problemas, da navegação às finanças, da acústica à irrigação.

Além disso, como os seus argumentos são dados por $\frac{\theta}{n}+\frac{k.2\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z})$, a diferença entre os argumentos das duas raízes correspondentes a dois valores consecutivos de k é $\frac{2\pi}{n}$:

$$\left(\frac{\theta}{n}+\frac{(k+1)2\pi}{n}\right)-\left(\frac{\theta}{n}+\frac{k.2\pi}{n}\right)=$$

$$=\frac{\theta}{n}+\frac{k.2\pi}{n}+\frac{2\pi}{n}-\frac{\theta}{n}-\frac{k.2\pi}{n}$$

$$=\frac{2\pi}{n}.$$

Concluímos então que os argumentos das raízes estão em progressão aritmética, e daqui podemos concluir que as raízes ficam igualmente espaçadas entre si e dividem o círculo em n partes iguais.

Deste modo os afixos das raízes de índice n de um número complexo $\rho cis\theta$ são os vértices de um polígono regular de n-lados, inscrito numa circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{\rho}$.

1.7 Espirais

Na disciplina de Educação Visual do 3.º Ciclo do Ensino Básico a Espiral é definida como uma linha enrolada em torno de um centro. ([9], página 189)

Podemos definir de uma forma intuitiva uma espiral em torno de um ponto O como sendo uma curva descrita por um ponto que simultaneamente roda em torno de O e se afasta de O. Existem diferentes tipos de espirais, conforme a relação que existe entre os dois movimentos, o de rotação e o linear. Iremos debruçar-nos sobre algumas espirais famosas na Matemática: a Espiral de Arquimedes[37], a Espiral de Fibonnaci e a Espiral Áurea.

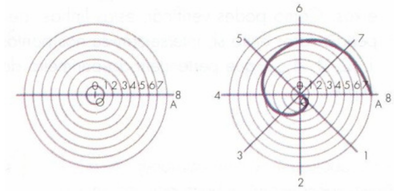
1.7.1 Espiral de Arquimedes

Traçado da Espiral de Arquimedes

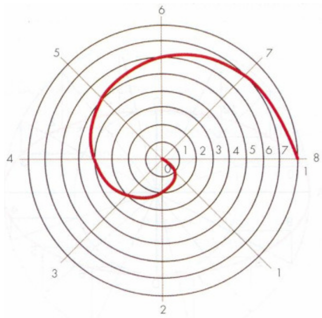
- Traça-se uma circunferência de centro O. Seja A um ponto dessa circunferência.

[37] Arquimedes de Siracusa foi um célebre geómetra do século III a.C., e um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Filho do astrónomo Fídeas, nasceu em Siracusa, na Sicília. Há relatos de sua visita ao Egipto, onde inventou um sistema de bombeamento chamado Parafuso de Arquimedes, em uso ainda hoje.

- Divide-se $\overline{AO}$ num certo número, n, de partes iguais.
- Com centro em O, traçam-se sucessivas circunferências concêntricas, com raios $k.\frac{\overline{OA}}{n}$, para $k = 1, 2, ..., n-1$.



- Traçam-se n linhas radiais[38] da circunferência e numera-se a intersecção de cada uma dessas linhas com a circunferência correspondente (da radial 1 com a circunferência 1, da radial 2 com a circunferência 2 e assim sucessivamente).

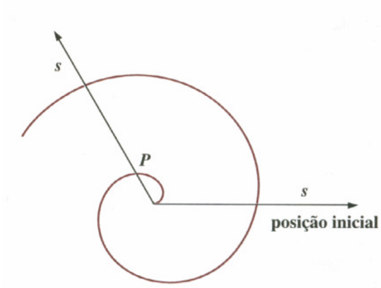


- Une-se O com os sucessivos pontos já determinados.

No livro sobre espirais, Arquimedes estuda esta curva.

Considerando uma semi-recta s que roda, com um movimento de rotação uniforme[39] em torno da origem, ao mesmo tempo que um ponto P, se move sobre s, também com um movimento uniforme (linear), afastando-se da origem de s e supondo, ainda, que os dois movimentos começam no mesmo instante, com P sobre a origem da semi-recta. A Espiral de Arquimedes é o lugar geométrico das posições do ponto P.

Na figura ao lado está representada a posição de P quando a semi-recta já rodou 120^o.



A posição de um ponto P do plano, é dada geralmente por coordenadas cartesianas x, y em relação a eixos fixos, mas pode também ser dada pelas coordenadas polares r, θ relativamente a um ponto fixo O, chamado pólo, e a uma semi-recta fixa a partir de O, por exemplo o semi-eixo positivo dos $x's$.

Aqui r representa a distância entre P e O e θ representa o ângulo entre o semi-eixo positivo dos $x's$ e o raio $[OP]$, medido no sentido anti-horário.

Se v for a velocidade do ponto P sobre a semi-recta s e se w for a velocidade de rotação da semi-recta s, em radianos, por unidade de tempo, então as coordenadas polares r e θ do ponto P serão dadas por $r = v\,t$ e $\theta = w\,t$, onde t representa o tempo.

Ora, se

[38] Linhas radiais são semi-rectas de origem O que formam entre si ângulos iguais.

[39] Um movimento é circular uniforme se o ângulo descrito é directamente proporcional ao tempo gasto.

(1) $r = v\,t \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{r}{v} = t$ e

(2) $\theta = w\,t \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\theta}{w} = t$, com v e $w \neq 0$

então de (1) e (2) vem

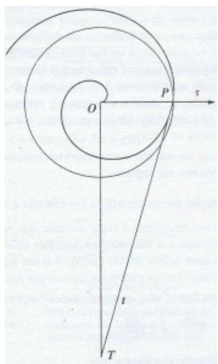
$$\frac{r}{v} = \frac{\theta}{w} \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{\theta\, v}{w} \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{v}{w}\theta .$$

Fazendo $a = \dfrac{v}{w}$, tem-se que $r = a\,\theta$, é a equação da espiral em coordenadas polares.

No livro Acerca das Espirais Arquimedes provou muitas propriedades interessantes desta curva, entre as quais destacamos a proposição seguinte.

Proposição XVIII ([1], página 101)

Supondo que a curva da figura ao lado é a espiral de Arquimedes cuja 1.ª volta vai de O a P, com θ a variar de 0 a 2π a área limitada por esta curva e pelo segmento de recta $[OP]$ é um terço da área do círculo de raio $\overline{OP}$.



Prova

A equação da espiral em coordenadas polares é $r = a\,\theta$ e $0 \le \theta \le 2\pi$, porque estamos a considerar a primeira volta.

Então a área limitada pela curva e por $[OP]$ é dada por:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a\theta} r\, dr = \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{a\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{a^2\,\theta^2}{2}\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\,\theta^2\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[a^2\,\frac{\theta^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\left[a^2\theta^3\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{6}\times a^2\times(2\pi)^3 = \frac{1}{6}\times a^2\times 8\times\pi^3 .$$

Ou seja, a área limitada por $[OP]$ e pela 1.ª volta da espiral de Arquimedes é

(i) $\dfrac{4}{3}a^2\pi^3$.

Determinemos a área do círculo de raio $\overline{OP}$.

Área do círculo $= \pi\times\overline{OP}^2 = \pi\times(a\theta)^2$, com $\theta = 2\pi$ $= \pi\times a^2\times 4\pi^2$.

Então

(ii) Área do círculo $= 4a^2\pi^3$.

Por (i) e (ii) provámos que a área do círculo de raio $\overline{OP}$ é o triplo da área limitada por $[OP]$ e pela 1.ª volta da espiral de Arquimedes.

Nesta Proposição XVIII Arquimedes afirma ainda que:

"Se PT é a tangente à espiral em P e $[OT]$ é perpendicular a $[OP]$, então $\overline{OT}$ é igual à medida do perímetro do círculo de centro O de raio $\overline{OP}$."

É a partir desta afirmação que se torna possível efectuar a rectificação da circunferência.

Prova

Seja A um ponto genérico da espiral de coordenadas polares (r, θ) e de coordenadas cartesianas (x, y), onde $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,sen\theta \end{cases}$

Mas $r = a\,\theta$, portanto $\begin{cases} x = a\theta\cos\theta \\ y = a\theta\,sen\theta \end{cases}$.

O vector tangente à curva no ponto A tem a direcção de $\left(\dfrac{dx}{d\theta}, \dfrac{dy}{d\theta}\right)$.

Como $\dfrac{dx}{d\theta} = a\,\cos\theta - a\theta\,sen\theta$ e $\dfrac{dy}{d\theta} = a\,sen\theta + a\theta\,\cos\theta$,

então um vector tangente à curva pode ser $\vec{t} = (\cos\theta - \theta\,sen\theta,\ sen\theta + \theta\,\cos\theta)$.

Quando $\theta = 2\pi$ o ponto A coincide com o ponto P de coordenadas cartesianas $(2\pi\,a, 0)$ e $\vec{t} = (1,\ 2\pi)$.

A recta PT, tangente à curva em P tem equação $y = 2\pi(x - 2\pi a)$, ou seja, $y = 2\pi\,x - 4\pi^2 a$.

A ordenada na origem é $-4\pi^2 a$, logo $T(0, -4\pi^2 a)$.

Então $\overline{OT} = 4\pi^2 a$. Ou seja, $\overline{OT} = 2\pi \times 2\pi a = 2\pi \times \overline{OP}$.

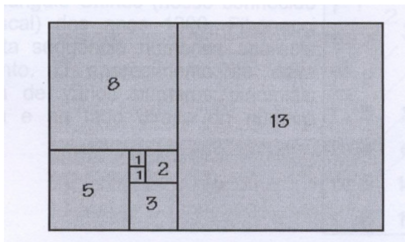
Provámos deste modo $\overline{OT}$ é o perímetro da circunferência de centro O e raio $\overline{OP}$.

Embora Arquimedes não o afirme explicitamente, isto implica que a área do triângulo $[OPT]$ é igual à área do círculo de raio $\overline{OP}$. Usando o Teorema da Medida do Círculo[40]; Arquimedes conseguiu assim rectificar a circunferência e fazer a Quadratura do Círculo (dado um triângulo é possível construir um quadrado com a mesma área como veremos no Capítulo II a propósito da quadratura do círculo).

1.7.2 A Espiral de Fibonnaci e a Espiral Áurea

Como no 8.º ano de escolaridade se introduz o estudo das sucessões, em particular a Sucessão de Fibonacci[41], e fazendo aqui a ponte com o rectângulo áureo, seria interessante fazer o estudo da Espiral de Fibonacci.

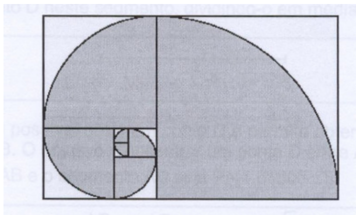
Esta espiral pode ser construída com régua e compasso o que a torna de certo modo especial. Vejamos como o podemos fazer.



- Anexemos dois quadrados de lado 1, e vamos obter um rectângulo 2 por 1, sendo o lado maior igual à soma dos lados dos quadrados anteriores.
- Anexemos, agora outro quadrado com lado 2 unidades (o maior lado do rectângulo, 2 por 1) e obtemos um rectângulo 3 por 2.
- Continuemos a anexar quadrados com lados iguais ao maior dos comprimentos dos rectângulos obtidos no passo anterior usando nessa anexação sempre o mesmo sentido de rotação. Na figura usou-se o sentido horário. A sequência dos lados dos quadrados é:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13…

- Usando um compasso, tracemos quartos de circunferências concordantes[42] nos quadrados de lado ℓ=1, ℓ=1, ℓ=2, ℓ=3, ℓ=5, ℓ=8, ℓ=13…, conforme a figura ao lado.



Efectuando este traçado obtemos uma espiral.

Esta espiral é do tipo das que encontramos nos girassóis,

---

[40] Teorema T7_ Resultados Preliminares

[41] Leonardo Pisano ou Leonardo de Pisa (1170-1250) – também conhecido como Fibonacci após a sua morte – foi um matemático italiano, dito como o primeiro grande matemático europeu depois da decadência helénica. É considerado por alguns como o mais talentoso matemático da Idade Média. Ficou conhecido pela descoberta da sequência de Fibonnaci e pelo seu papel na introdução dos algarismos árabes na Europa.

[42] O extremo final de um coincide com o extremo inicial do outro.

nas pinhas, na concha do Nautilus e não só, nos caracóis, nos tornados, nas impressões digitais, até mesmo as galáxias têm braços de estrelas que se estendem em gigantescas espirais deste tipo. [17]

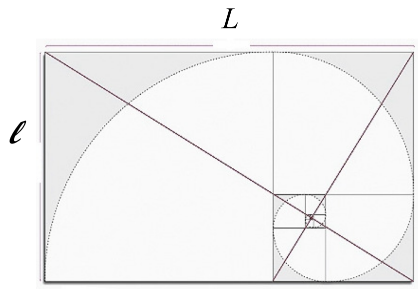
Nos rectângulos construídos anteriormente tem-se que à medida que o tamanho aumenta, a razão entre o lado maior e o lado menor aproxima-se do número de ouro e a sequência das medidas do comprimento do lado maior de cada um destes rectângulos é a Sequência de Fibonnaci como em (1). Deste modo vem:

$\lim_{i \to \infty} \frac{f_{i+1}}{f_i} = \phi$, $i \in \mathbb{N}$ e onde os f_i são os termos da sucessão de Fibonacci.

Mas a espiral assim obtida não é a Espiral Áurea, pois os rectângulos utilizados para construir a Espiral de Fibonnaci não são rectângulos de ouro, são aproximadamente rectângulos de ouro, já que não é o quociente de dois termos consecutivos da sucessão de Fibonnaci que é igual ao número de ouro, mas sim o limite do quociente de dois termos consecutivos quando o número de termos tende para infinito.

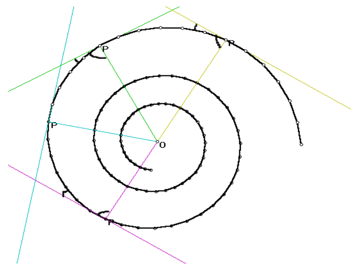
Vejamos como construir a Espiral Áurea. [15]

Como provámos anteriormente se dividirmos um rectângulo de ouro num quadrado e num rectângulo, o rectângulo obtido ainda é um rectângulo de ouro. Se por sua vez dividirmos este “novo” rectângulo num quadrado e num rectângulo este rectângulo é novamente um rectângulo de ouro. Dividindo sucessivamente cada um dos rectângulos de ouro que vamos obtendo desta forma encontramos rectângulos de ouro “encaixados” e cada vez mais pequenos. Neles podemos inscrever uma espiral (traçando quartos de circunferências concordantes) que converge para um ponto chamado pólo e que se encontra na intersecção de duas diagonais, uma do rectângulo original e a outra do rectângulo que obtivemos com a primeira divisão.



A espiral inscrita na sucessão de rectângulos de ouro é a Espiral Áurea.

A Espiral Áurea é um caso particular da espiral logarítmica que se denomina também por espiral equiangular, porque o ângulo formado pela tangente à curva em qualquer um dos seus pontos P com o segmento $[OP]$ é constante, onde O é um ponto fixo do plano tomada para origem do referencial.



A equação, em coordenadas polares, da espiral logarítmica (ou equiangular) é $r = b e^{a\theta} \Leftrightarrow a\,\theta = \ln\left(\frac{r}{b}\right) \Leftrightarrow \theta = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{r}{b}\right)$,

onde $r = \overline{OP}$ e θ o ângulo que $[OP]$ faz com o eixo das abcissas.

No caso da Espiral Áurea a equação é $r = \phi^{\frac{2\theta}{\pi}} \Leftrightarrow r = \left(e^{\ln\phi}\right)^{\frac{2\theta}{\pi}} \Leftrightarrow r = e^{\frac{2\ln\phi}{\pi}\theta}$.

Portanto os valores das constantes a e b serão: $a = \frac{2\ln\phi}{\pi}$ e $b = 1$, onde ϕ é o número de ouro. [22]

Na terminologia de Descartes esta era considerada uma curva mecânica. Este afirmou que a curva não era rectificável[43] o que foi mais tarde negado por Torricelli que em 1645 apresentou a primeira rectificação moderna de uma curva. Mas foi Jacques Bernoulli, um matemático fascinado pelo estudo das curvas, quem mais avançou nos estudos da espiral equiangular.

[43] Um arco de uma curva diz-se rectificável se o seu comprimento pode ser definido como o limite superior dos comprimentos de todas as linhas poligonais que nele se inscrevam.

Capítulo II

Números Construtíveis e os Problemas Clássicos da Antiguidade

Sob o ponto de vista dos gregos, um problema de construção resume-se a construir um elemento desconhecido utilizando apenas régua não graduada e compasso a partir de certos elementos geométricos dados. Usando unicamente estes instrumentos, os gregos procuraram representar todos os números conhecidos.

Já vimos no capítulo anterior que não é possível construir todos os polígonos regulares utilizando apenas estes dois instrumentos euclidianos. Os gregos também não conseguiram duplicar o cubo, quadrar o círculo e trissectar um ângulo arbitrário, usando apenas estes instrumentos. Podemos então colocar a seguinte questão:

Quando é possível fazer uma construção geométrica usando apenas os instrumentos euclidianos?

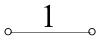
Faremos um breve estudo dos Números Construtíveis e consequentemente das Extensões de Corpos, pois utilizando as extensões de corpos é possível encontrar uma condição necessária e suficiente para a possibilidade de construções geométricas.

2.1 Números Construtíveis

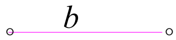
Dizemos que um número real positivo a é ***construtível*** se conseguirmos construir um segmento cuja medida do comprimento é a, num número finito de passos a partir do segmento que tomamos como unidade, usando uma régua não graduada e compasso.

Usando o teorema seguinte mostramos que um problema com números que envolve apenas as quatro operações fundamentais mais a extracção da raiz quadrada traduz-se num problema geométrico que pode ser resolvido usando apenas a régua não graduada e o compasso.

***Teorema**:* Se os números a e b *são números reais positivos construtíveis, então,* $a+b$, $a-b$ com $a>b$, $a\times b$, $\frac{a}{b}$ e $\sqrt{a}$, também são números construtíveis. ([14], página 14)

Tomemos, então, o seguinte segmento de recta cujo comprimento é tomado para unidade 

e consideremos os seguintes segmentos de recta de comprimentos construtíveis a e b , 



Dados dois pontos tracemos uma recta e construamos os segmentos de recta que têm como medida do comprimento:

- $a+b$

Consideremos o segmento de recta $[AB]$ tal que $a=\overline{AB}$ e tracemos, sobre a recta AB, um segmento de recta $[CD]$ tal que $b=\overline{CD}$ de modo que C coincida com B e esteja entre A e D. Para isso iremos construir uma circunferência com centro em B e raio b. A circunferência intersecta a recta nos pontos que denotaremos por D e E. O segmento de recta $[AD]$ tem comprimento $a+b$, ou seja, $\overline{AD}=a+b$ e foi construído utilizando apenas régua não graduada e compasso.

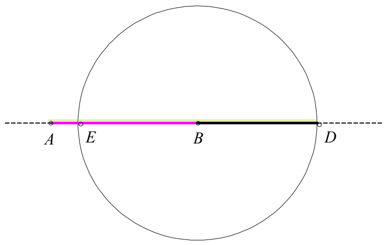


Figura 1

- $a-b$

A construção é análoga à anterior, no entanto é exigida a condição do comprimento a ser maior que o comprimento b, senão não faria sentido efectuar a subtracção dos dois comprimentos. Como $\overline{EB}=\overline{BD}$ e como E está entre A e B, $a-b=\overline{AE}$.

- $a \times b$

Sobre uma recta dada tracemos $[AB]$, tal que $a=\overline{AB}$. Por A tracemos uma outra recta, concorrente com a anterior, onde marcamos um segmento unitário, $[AC]$, e de seguida também a partir de A e sobre a mesma semi-recta, $\dot{A}C$, marcamos o segmento

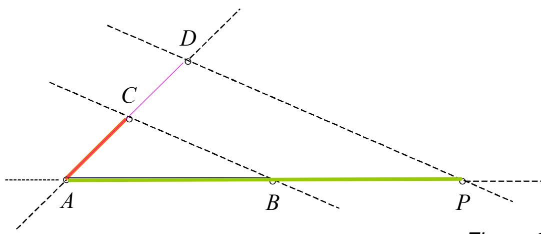


Figura 2

$[AD]$, tal que $b=\overline{AD}$ (estamos a supor que $b>1$ mas se $b<1$ a construção seria análoga).

Tracemos a recta que contém os pontos C e B e construamos uma recta paralela a BC que passa por D[44], que intersecta a recta AB num ponto que denotamos por P.

Usando a semelhança dos triângulos $[ACB]$ e $[ADP]$, podemos determinar o quarto proporcional dos segmentos de recta 1, b e a.

Tem-se então que $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}$, isto é, $\frac{1}{b}=\frac{a}{\overline{AP}}$.

Logo $a\times b=\overline{AP}$.

- $\frac{a}{b}$

Nas mesmas condições do caso anterior, tracemos agora a recta que passa por B e D e construamos uma recta paralela à recta BD e que passa por C que intersecta a recta AB num ponto que denotaremos por Q.

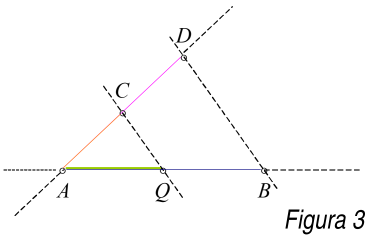


Figura 3

Usando um raciocínio análogo ao anterior tem-se que $\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AQ}}$, isto é, $\frac{b}{1}=\frac{a}{\overline{AQ}}$.

Donde $\frac{a}{b}=\overline{AQ}$.

- $\sqrt{a}$

Construamos sobre a mesma recta os segmentos $[AB]$ e $[BC]$, não sobrepostos, tais que $\overline{AB}=1$ e $\overline{BC}=a$. Seja M o ponto médio de $[AC]$ e construamos uma semicircunferência com centro M e diâmetro $\overline{AC}$. De seguida construamos a per-

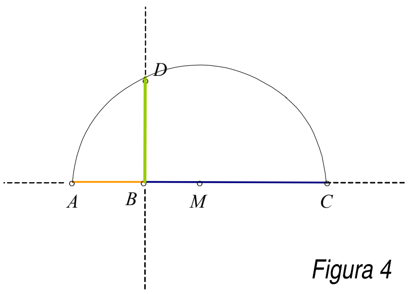


Figura 4

[44] Construção 1.1._ Capítulo I.

pendicular a AC que passa pelo ponto B e seja D o ponto de intersecção dessa recta com a semicircunferência. Então $\overline{BD}$ será a raiz quadrada de $\overline{BC}$.

Provemos este facto.

Aquilo que fizemos foi construir o meio proporcional entre o segmento de recta $\overline{BC}$ e 1. O corolário[45] que afirma que qualquer ângulo inscrito numa semicircunferência é recto, em conjunção com o Teorema da Altura[46], permite construir o segmento $[BD]$ cujo comprimento verifica a condição pretendida, pois $\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}$, isto é, $\frac{a}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{1}$.

Logo $\overline{BD}^2 = a$, ou seja, $\overline{BD}$ é a raiz quadrada de a.

Podemos generalizar a noção de número real positivo construtível para número real construtível.

• Um número real é construtível se for zero ou se o seu módulo for um número real construtível.

2.2 Plano Constituível

Utilizando apenas a régua não graduada e o compasso podemos considerar procedimentos de dois tipos:

(i) traçar uma recta que passa por dois pontos;

(ii) desenhar circunferências com centro num ponto e passando por outro.

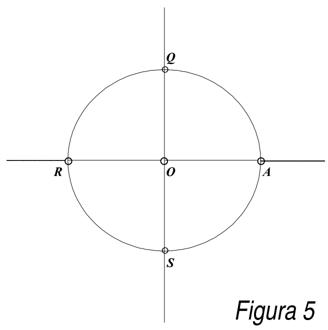


Figura 5

A resolução de qualquer problema de construção é iniciado com pelo menos dois pontos distintos, sejam eles O e A, já construídos. Com os procedimentos definidos podemos:

- traçar a recta OA;
- desenhar a circunferência com centro em O que passa por A, e obtemos o ponto R.

[45] Corolário do Teorema C2_Resultados preliminares

[46] Teorema T6_Resultados preliminares

- traçar a perpendicular à recta OA que passa pelo ponto O [47], obtemos os pontos Q e S.

Obtivemos, assim, uma sequência de pontos R, Q e S que define a construção de um referencial. Recorrendo, agora, à geometria analítica, consideramos $(0,0)$ e $(1,0)$ as coordenadas dos pontos dados inicialmente, O e A respectivamente, e a unidade de comprimento é a distância entre os dois pontos. Chamemos eixo dos $x's$ à recta horizontal, eixo dos $y's$ à recta vertical, plano cartesiano ao plano xOy e ao ponto O, intersecção dos eixos, origem do referencial, conforme mostra a figura ao lado.

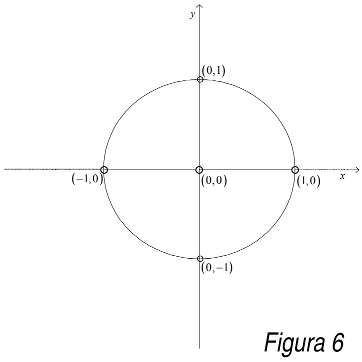


Figura 6

Os pontos R, Q e S, obtidos por intersecção da circunferência com cada uma das rectas chamam-se *pontos construtíveis.*

A partir dos pontos dados inicialmente podem portanto ser construídos outros pontos usando apenas régua não graduada e compasso (procedimentos i) e ii)). Dado um ponto qualquer do plano cartesiano, para determinar se é construtível precisamos de introduzir mais algumas noções.

No plano xOy tem-se que:

uma recta é construtível se contém, pelo menos, dois pontos construtíveis;

(1). uma circunferência é construtível se o seu centro é um ponto construtível e passa por um ponto também construtível;

(2). um ponto P, diferente de O e A, é construtivel se é um ponto de intersecção de duas rectas construtíveis, de duas circunferências construtíveis ou de uma recta com uma circunferência ambas construtíveis, construído num número finito de passos a partir do conjunto de pontos dado inicialmente, $\{O, A\}$, utilizando apenas os procedimentos (i) e (ii) atrás definidos.

Os eixos coordenados são, então, rectas construtíveis e a circunferência unitária é uma circunferência construtível, o que não implica que todos os pontos que estão sobre os eixos ou sobre a circunferência unitária sejam construtíveis.

[47] Construção da mediatriz do segmento $[AR]$ sendo O o ponto médio do segmento. Para esta construção os arcos com centros A e R devem ter raio $\overline{AR}$, para garantir a validade da construção (ii).

• Chama-se ***plano construtível*** ao conjunto dos pontos construtíveis.

Definição:

Seja $\mathcal{P}$ um conjunto de pontos do plano construtível, entre os quais estão os pontos $(0,0)$ e $(1,0)$.

Dizemos que um ponto P é **construtível a partir de** $\mathcal{P}$ se existe uma sequência finita de pontos do plano cartesiano $P_1, P_2, ..., P_n = P$ tais que para cada $i = 1, ..., n$, o ponto P_i é construtível num só passo, utilizando apenas os procedimentos (i) e (ii), a partir de $\mathcal{P} \cup \{P_1, P_2, ..., P_{i-1}\}$. [19]

Finalmente, um comprimento construtível é um número real positivo que representa a distância entre dois pontos construtíveis. Por exemplo, $\sqrt{2}$ é construtível, pois é a distância entre A e Q (fig.5).

Como compatibilizar a noção de comprimento construtível e de número construtível dadas anteriormente com a de ponto construtível?

Veremos que as coordenadas de um ponto construtível são números construtíveis e reciprocamente, que todos os pares ordenados de números construtíveis correspondem a pontos construtíveis.

Como vimos anteriormente, dados os comprimentos construtíveis a e b, os comprimentos $a+b$, $a-b$ (com $a \geq b$), $\frac{a}{b}$ (com $b \neq 0$) e $\sqrt{a}$ são construtíveis – as construções descritas são do tipo (i) e (ii) e têm um número finito de passos.

Estas operações aritméticas são as únicas que é possível efectuar usando as construções do tipo (i) e (ii), pois os pontos obtidos por intersecção de rectas construtíveis têm coordenadas que são solução de um sistema linear cujos coeficientes são números construtíveis, portanto as operações envolvidas para a sua determinação são operações aritméticas básicas envolvendo números construtíveis.

Os pontos obtidos por intersecção de uma circunferência com uma recta ou por intersecção de duas circunferências têm coordenadas que são solução de sistemas de 2.º grau cujos coeficientes são construtíveis, portanto as operações envolvidas para a sua determinação são, para além das operações aritméticas básicas, a extracção da raiz quadrada envolvendo números construtíveis.

Para a determinação da distância entre pontos construtíveis as operações utilizadas são as já referidas.

Assim, dado um segmento de recta cujo comprimento é tomado para unidade de comprimento, um comprimento a é construtível se é obtido do segmento unitário por um número finito de operações fundamentais da aritmética mais extracção da raiz quadrada.

Deste modo, averiguar o que é possível construir com régua não graduada e compasso, no mundo das figuras traduz-se agora em saber o que se pode obter apenas com as operações fundamentais da aritmética mais a extracção da raiz quadrada, no mundo dos números.

O raciocínio anterior era completamente inacessível aos gregos pois para estes a medida de um comprimento seria sempre representada por uma razão entre dois inteiros, um número racional, tal comprimento incluía-se na categoria dos comensuráveis. Ao encontrar os irracionais, aos quais não conseguem dar a forma de fracção, os matemáticos gregos vêem-se obrigados a admitir os "incomensuráveis" (irracionais), o que trouxe uma crise que provocou uma separação entre a geometria e a aritmética. Esta separação entre os dois ramos da Matemática marcou dois mil anos de distância de tempo de procura de soluções para estes problemas e particularmente para os três famosos problemas da antiguidade. Só no século XVII, com a criação da geometria analítica (Fermat e Descartes) é que se estabelece a simbiose entre geometria e álgebra, favorecendo o tratamento aritmético do comensurável e incomensurável.

Utilizando a Teoria das Extensões dos Corpos vejamos qual é a condição necessária para a possibilidade das construções geométricas.

Em 1881 Kronecker criou uma extensão de um corpo juntando-lhe uma raiz α de um polinómio irredutível[48] $p(x)$ de grau n, isto é, este novo corpo é o menor corpo que contém o corpo inicial e a raiz α (com a condição $p(\alpha)=0$).

Podemos definir extensão de um corpo da seguinte forma:

[48] Um polinómio $f(x) \in F[x]$ diz-se irredutível sobre F se e somente se não tem zeros em F. Isto é, se não existe $\alpha \in F : f(\alpha)=0$.

- Sejam K e F corpos tais que $K \subset F$. Se K é um corpo com as operações de F e $1_K = 1_F$ (identidade em K e F), então dizemos que K é um subcorpo de F e $\boldsymbol{F}$ é uma **Extensão de $\boldsymbol{K}$**, que denotaremos por $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{K}$.

  Assim $\mathbb{R}$ é uma extensão do corpo $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{C}$ uma extensão dos corpos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$.

  Seja F uma extensão de um corpo K e seja $a \in F$.

- Dizemos que $\boldsymbol{a}$ é **algébrico** sobre $\boldsymbol{K}$ se existe um polinómio $f(x) \in K[x]$, não nulo, tal que $f(a) = 0$. Caso contrário dizemos que $\boldsymbol{a}$ é **transcendente** sobre $\boldsymbol{K}$.

  Vejamos um exemplo de um número que é algébrico e de um número transcendente sobre $\mathbb{Q}$.

  Como vimos anteriormente $\mathbb{R}$ é uma extensão do corpo $\mathbb{Q}$ e $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ é raiz do polinómio $f(x) = x^2 - 2$ então $\sqrt{2}$ é um número algébrico sobre $\mathbb{Q}$. No entanto o número $\pi \in \mathbb{R}$ não é algébrico sobre $\mathbb{Q}$ já que não existe nenhum polinómio $p(x) \in Q[x]$ tal que $p(\pi) = 0$.

- Quando a é algébrico sobre o corpo K podemos definir o grau de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{K}$ como o grau do polinómio irredutível $f(x) \in K[x]$ tal que a satisfaz a equação $f(x) = 0$. Se, adicionalmente, $f(x)$ for mónico[49], chama-se ***polinómio mínimo*** de a sobre K.

  Por exemplo, o grau de $\sqrt{2}$ sobre $\mathbb{Q}$ é 2, pois $\sqrt{2}$ é a raiz do polinómio irredutível $p_1(x) = x^2 - 2$, do mesmo modo se tem que o grau de $\sqrt[3]{2}$ sobre $\mathbb{Q}$ é 3, já que $\sqrt[3]{2}$ é a raiz do polinómio $p_2(x) = x^3 - 2$ de $\mathbb{Q}[x]$.

- Quando uma extensão F de um corpo K é tal que todo o elemento de F é algébrico sobre K dizemos que F é uma **Extensão Algébrica** de K. Denotaremos por $K(a)$ a extensão do corpo F obtida quando juntamos o elemento a e mantemos a estrutura de corpo, isto é, $K(a)$ é o "menor" corpo que contém $F \cup \{a\}$.

Não esquecendo o objectivo deste pequeno estudo das extensões de corpos podemos agora enunciar uma condição necessária para as construções geométricas que, como vimos atrás, se traduzem na utilização, um número finito de vezes, das operações aritméticas básicas, que correspondem à estrutura de corpo, e da extracção da raiz quadrada.

[49] Um polinómio mónico é aquele em que o coeficiente do termo de mais elevado grau é 1.

Teorema

Se um número real a é construtível, então a é algébrico e o grau do polinómio mínimo de a sobre $\mathbb{Q}$ é uma potência de 2.

Usando esta condição podemos dizer que, por exemplo, $\sqrt{2}$ é construtível e $\sqrt[3]{2}$ não é construtível. Pois como vimos anteriormente embora $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{2}$ sejam ambos algébricos o grau do polinómio mínimo de $\sqrt{2}$ sobre $\mathbb{Q}$ é 2, ou seja uma potência de 2, enquanto o grau do polinómio mínimo de $\sqrt[3]{2}$ sobre $\mathbb{Q}$ é 3 que não é uma potência de 2.

Existe, no entanto, uma condição necessária e suficiente para que um número seja construtível que utiliza a noção de extensão quadrática.

2.3 Extensões quadráticas de corpos

Seja $\mathbb{F}$ um subcorpo de $\mathbb{R}$.

Seja k um número real positivo tal que $\sqrt{k} \notin \mathbb{F}$. O conjunto $\mathbb{F}(k) = \left\{x + y\sqrt{k} : x, y \in \mathbb{F}\right\}$ munido das operações induzidas pelas do corpo $\mathbb{R}$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$ e uma extensão de $\mathbb{F}$ chamada **extensão quadrática** de $\mathbb{F}$.

Suponhamos agora que $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, ..., \mathbb{F}_n$ é uma sequência finita de corpos, com $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$ e cada $\mathbb{F}_{i+1} = \mathbb{F}_i(k_{i+1})$ com $k_{i+1} \in \mathbb{F}_i$ mas $\sqrt{k_{i+1}} \notin \mathbb{F}_i$, para $i = 0, \dots, n-1$ (ou seja, $\mathbb{F}_{i+1}$ é uma extensão quadrática de $\mathbb{F}_i$, para $i = 0, 1, \dots, n-1$).

Nestas condições dizemos que $\mathbb{F}_n$ é uma **extensão quadrática de ordem *n*** do corpo $\mathbb{Q}$.

Um corpo $\mathbb{F}$ é uma extensão finita de $\mathbb{Q}$ se e só se $\mathbb{F} = \mathbb{F}_n$, para algum $n \geq 1$.

Atendendo ao que já vimos sobre números construtíveis conclui-se que:

- Um **número é construtível** se e só se pertence a alguma extensão quadrática de $\mathbb{Q}$. ([7], página 125)

Vejamos o seguinte exemplo.

Seja $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{2}}$

$\alpha^2 = 1 + \sqrt{2}$

$\alpha^2 - 1 = \sqrt{2}$

$\left(\alpha^2 - 1\right)^2 = 2$

$\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 - 2 = 0$

$x^4 - 2x^2 - 1 = 0$ este é o polinómio de $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ sobre $\mathbb{Q}$.

Seja $\beta = \alpha^2 - 1$

$\beta^2 = 2 \in \mathbb{Q} = \mathbb{F}_0$ mas $\beta = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(2) = \mathbb{F}_1$

$\alpha^2 = 1 + \sqrt{2} \quad \in \mathbb{F}_1$ mas $\alpha \notin \mathbb{F}_1$

$\sqrt{1+\sqrt{2}} \quad \in \mathbb{F}_1\left(1+\sqrt{2}\right) = \mathbb{F}_2$

$\sqrt{1+\sqrt{2}}$ pertence a uma extensão quadrática de ordem 2 de $\mathbb{Q}$.

2.4 Os três problemas clássicos da antiguidade

Durante a Antiguidade Clássica, no período chamado Época Heróica da Matemática, começaram a estudar-se os problemas que vieram a ser conhecidos como os Três Problemas Clássicos da Matemática Grega. Muito mais tarde, no século XIX estes problemas foram organizados e sistematizados. Os problemas consistiam na:

(1) Trissecção do Ângulo

Dado um ângulo qualquer, determinar, com régua não graduada e compasso, um ângulo com um terço da amplitude do ângulo inicial;

(2) Quadratura do Círculo

Dado um círculo C de raio r determinar, com régua não graduada e compasso, o lado a de um quadrado de área igual à do círculo C ;

(3) Duplicação do Cubo

Dado um cubo de aresta a determinar com régua não graduada e compasso, a aresta b de outro cubo com o dobro do volume.

Estes problemas despertaram durante dois mil anos a atenção de alguns dos matemáticos herdeiros da tradição grega.

Existiam números conhecidos que os gregos não foram capazes de representar, o que os impossibilitou de resolver problemas tais como a duplicação do cubo e a quadratura do círculo, já que o primeiro se resumia à construção de um segmento de recta cuja medida do comprimento era $\sqrt[3]{2}$ e o segundo resumia-se a determinar $\sqrt{\pi}$.

Os gregos também não conseguiram provar que estas construções eram impossíveis, só no final do século XIX, com o desenvolvimento da Álgebra e da Análise, esta questão foi completamente esclarecida. Em 1837 Pierre Laurent Wantzel apresentou a primeira demonstração da impossibilidade da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo e em 1882 o matemático Ferdinand von Lindman, num artigo publicado na revista *Mathematische Annalen,* pôs fim ao problema da quadratura do círculo demonstrando que π é transcendente.

Salienta-se no entanto a notoriedade das propostas de solução por terem impulsionado o aparecimento de novos processos, novas estruturas matemáticas, nomeadamente o aparecimento de algumas curvas matemáticas.

Para os gregos era claro que o uso de curvas, diferentes da recta[50] e da circunferência, na resolução de problemas clássicos violava "as regras do jogo" – pois estas eram as únicas que a régua não graduada e o compasso permitiam traçar. Mas numa tentativa de encontrar solução para cada um dos problemas, os geómetras desviaram-se das condições exigidas e descobriram novas curvas. Estes admitiam somente dois processos para descobrir outras curvas:

(1) por combinação de movimentos uniformes,

(2) e como intersecção de superfícies geométricas que lhes eram familiares.

Alguns exemplos de curvas que surgiram na História da Matemática na tentativa de dar resposta a estes problemas foram a Espiral de Arquimedes, que estudámos no capítulo anterior; a Trissectriz de Hípias e as Cónicas.

A Trissectriz de Hípias, uma das mais antigas curvas da Matemática, talvez tenha sido a primeira a ser introduzida depois da recta e da circunferência, e a sua descoberta deve-se aparentemente a Hípias Elis[51]. Esta curva permite trissectar qualquer ângulo agudo. Como tal pensa-se que tenha sido descoberta no decurso dos estudos feitos em relação ao problema da Trissecção do Ângulo.

[50] A recta é considerada como uma curva com curvatura nula.

[51] Hípias (460 a.C.-400 a.C.) é sobretudo conhecido pela construção da trissectriz.

Embora esta curva tenha aparecido pela primeira vez na história como Trissectriz de Hípias foi posteriormente utilizada por Dinóstrato[52] na resolução da quadratura do círculo, pelo que é denominada umas vezes por Trissectriz e outras por Quadratriz.

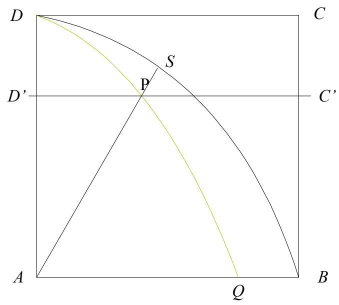
Papo de Alexandria[53] no livro IV da sua colecção Matemática descreve o processo de construção desta curva, que tudo leva a crer ser a primeira curva a ser definida por via cinemática. Desde essa época têm-se inventado instrumentos para a traçar. Papo exprime, de uma forma um pouco confusa, os movimentos que vão gerar a curva. O processo da sua construção diz-se cinemático, porque a curva é obtida por pontos que resultam da intersecção de dois segmentos de recta em movimento uniforme[54].

Podemos descrever a sua construção do seguinte modo:

1. Seja $[ABCD]$ um quadrado.

2. Construa-se uma recta $D'C'$, paralela ao lado $[DC]$ e que gradualmente vai descendo, a uma velocidade constante, desde a sua posição inicial – que é coincidente com o lado $[DC]$ até coincidir com o lado $[AB]$;

3. Simultaneamente, o lado $[AD]$ roda em torno do ponto A, com um movimento circular uniforme, desta posição inicial $[AD]$ até à posição final coincidente com o lado $[AB]$.



Ambos os movimentos descritos anteriormente terminam simultaneamente e têm velocidades constantes.

Enquanto se deslocam, as duas rectas intersectam-se num determinado ponto móvel, P, ponto esse que descreve a *Trissectriz de Hípias*.

Como os movimentos anteriores são uniformes podemos afirmar que a distância percorrida pelo lado $[DC]$ é proporcional ao tempo gasto no seu percurso. Além disso, a amplitude do arco determinado pela circunferência de centro A e raio $\overline{AD}$ é proporcional ao tempo gasto no percurso circular deste raio. Deste modo podemos afirmar que a distância rectilínea percorrida pelo lado $[DC]$ e

[52] Dinóstrato (390 a.C.-320 a.C.). Para além da sua resolução da quadratura do círculo usando a Quadratriz de Hípias, e do facto de ser irmão de Menecmo, pouco mais se sabe de Dinostrato, que é referido por Proclo como tendo contribuído para tornar "a geometria ainda mais perfeita.

[53] Pappus ou Papo - (fim do séc. III d.C.) foi criador da Trigonometria, realizou um estudo crítico dos conhecimentos anteriores, e apresentou numerosas contribuições originais à geometria e à aritmética. A Colecção Matemática, que reúne os seus principais trabalhos, serviu de inspiração para muitos matemáticos posteriores durante bastante tempo.

[54] Um movimento é uniforme se o espaço percorrido é directamente proporcional ao tempo gasto.

a amplitude angular percorrida pelo lado $[AD]$ são proporcionais. Ou seja, em todas as posições do ponto P, tem-se que $\frac{\overline{AD}}{\overline{AD'}} = \frac{\widehat{DB}}{\widehat{SB}} = \frac{comp\,\widehat{DB}}{comp\,\widehat{SB}}$. Onde S é o ponto de intersecção de $\dot{A}P$ com $\widehat{DB}$.

É a partir desta propriedade da curva de Hípias que podemos reduzir todas as questões de proporcionalidade entre ângulos a questões análogas entre segmentos de recta, e, em particular, esta propriedade permite reduzir a trissecção de um ângulo à trissecção de um segmento de recta.

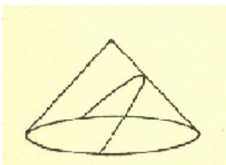
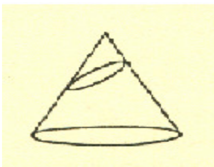
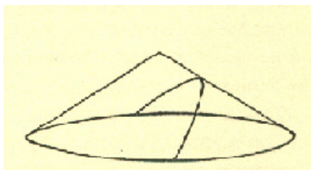
Como a trissecção de um segmento de recta, com régua e compasso, era conhecida dos geómetras gregos, está assim justificada a importância da curva de Hípias na resolução do problema da *Trissecção do Ângulo.*

Observe-se que a curva exposta permite dividir um ângulo num número qualquer de partes, desde que se possa expressar a razão em causa em termos de segmentos de recta.

Quanto às Cónicas, foi Menecmo[55] que ao debruçar-se sobre o problema da Duplicação do Cubo descobriu que estas curvas tinham as propriedades desejadas para resolver este problema.

Menecmo reconheceu essas curvas como secções planas de um cone circular recto (base circular, vértice na perpendicular ao plano da base passando pelo centro). A secção utilizada era perpendicular a uma das geratrizes[56] do cone. Os diferentes tipos de cónicas eram obtidas conforme o ângulo no vértice[57] fosse agudo, recto ou obtuso.

As curvas descobertas por Menecmo eram designadas por "secção de um cone de ângulo recto", "secção de um cone de ângulo agudo" e "secção de um cone de ângulo obtuso".

Cerca de um século e meio mais tarde, Apolónio de Perga[58] escreveu um célebre tratado sobre estas curvas – *As cónicas*. É a este matemático que normalmente associamos as cónicas, pois os seus estudos acerca destas tiveram impacto. Foi Apolónio quem lhes deu o nome por que ainda hoje são conhecidas, à primeira curva Apolónio chamou Parábola, à segunda Elipse e à terceira Hipérbole. E mostrou que não é necessário tomar secções perpendiculares a uma geratriz do cone e que de um

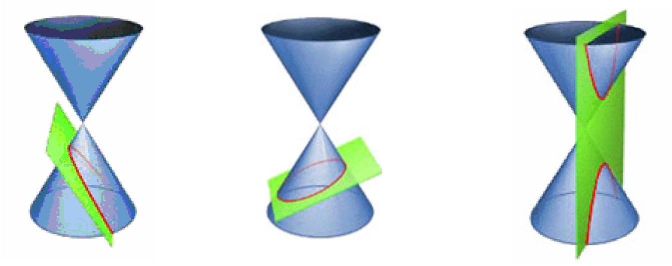
[55] Menecmo (380 a.C.-320 a.C.). Aluno de Eudóxio e irmão de Dinostrato.

[56] Num cone circular recto, cuja base é um círculo, a superfície lateral é formada por geratrizes (g), que são segmentos de recta que ligam o vértice aos pontos da circunferência do círculo. O conjunto desses pontos, ou seja, a totalidade da circunferência da base, tem o nome de directriz.

[57] Ângulo de duas geratrizes complanares com o eixo do cone.

[58] Apolónio da Perca. Não são conhecidas datas precisas da sua vida, mas diz-se que viveu durante os reinos de Ptolomeu Euergetes e de Ptolomeu Filopater e que era vinte e cinco a quarenta anos mais novo que Arquimedes o que sugere que tenha vivido de 262 a 190 a.C. Pouco se sabe da sua vida e quanto à sua obra, embora fosse grande a sua produtividade cientifica, só dois dos seus muitos tratados se preservaram, de Dividir segundo uma razão e a sua obra prima - As Cónicas.

único cone podem ser obtidas os três tipos de cónicas, basta variar a inclinação do plano da secção. Mostrou, ainda que o cone não precisa de ser recto, pode também ser um cone oblíquo ou escaleno (não recto) e substituiu o cone de uma só folha por um duplo, aproximando deste modo as curvas antigas do ponto de vista moderno e então a hipérbole surge da forma que hoje nos é familiar, como uma curva de dois ramos.



Parábola ***Elipse*** ***Hipérbole***

2.4.1 Trissecção de um ângulo.

Analogamente ao modo como definimos a bissectriz de um ângulo podemos definir trissectriz de um ângulo como cada uma das semi-rectas que o dividem em três partes iguais. Ou seja, uma trissectriz do ângulo $\measuredangle BAC$, não nulo, é uma semi-recta $\dot{A}D$, com $D \in \operatorname{int}(\measuredangle BAC)$, tal que $D\hat{A}B = \frac{1}{3} B\hat{A}C$ ou $D\hat{A}C = \frac{1}{3} B\hat{A}C$.

Como já referimos anteriormente a trissecção de um ângulo arbitrário foi um dos três problemas clássicos de construção de régua e compasso, que durante séculos desafiaram matemáticos e geómetras. Não é conhecida a origem deste problema, mas é muito provável que tenha surgido no seguimento da construção de polígonos regulares, já que, por exemplo, para construir um polígono regular de nove lados é necessário trissectar um ângulo de 120^o.

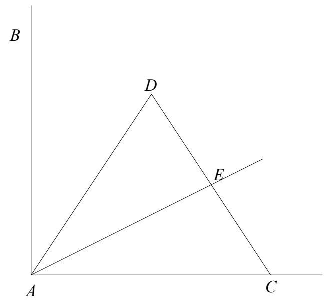
Iremos mostrar a possibilidade de trissectar alguns ângulos com régua não graduada e compasso; a impossibilidade de trissectar um ângulo arbitrário com régua não graduada e compasso e alguns processos alternativos para trissectar um ângulo.

2.4.1.1 Trissecção de ângulos com régua não graduada e compasso.

O problema da trissecção de um ângulo é um pouco diferente dos outros dois problemas clássicos (a duplicação do cubo e a quadratura do círculo), pois enquanto para estes dois problemas nunca é possível a sua construção, existem ângulos que são possíveis de trissectar. Vejamos o exemplo do ângulo recto.

Seja o $\measuredangle BAC$ um ângulo tal que $B\hat{A}C = 90^{\circ}$.

Consideremos a semi-recta $\overset{\bullet}{A}C$ e sobre esta tracemos um triângulo equilátero, cujos vértices são A, C e D.



Bissectando o ângulo $\measuredangle DAC$ temos o ângulo $\measuredangle BAC$ dividido em três partes iguais, pois em triângulos equiláteros cada um dos seus ângulos internos mede 60º que ao ser bissectado se divide em dois ângulos de 30º.

Ora, seja $\overset{\bullet}{A}E$ a bissectriz do $\measuredangle DAC$,

então

$$B\hat{A}C = B\hat{A}D + D\hat{A}E + E\hat{A}C \quad ,$$

isto é,

$$90^{\circ} = B\hat{A}D + 30^{\circ} + 30^{\circ}$$

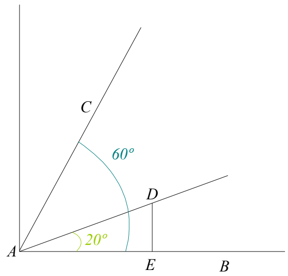
ou seja,

$$B\hat{A}D = 30^{\circ}.$$

E assim fica justificada a trissecção do ângulo de 90^{o}.

2.4.1.2 *Impossibilidade de trissectar um ângulo arbitrário com régua não graduada e compasso* ([7], página 126)

Mostremos agora a impossibilidade de trissectar um ângulo arbitrário somente com régua não graduada e compasso. Para provar este facto iremos mostrar que é, por exemplo, impossível construir com régua não graduada e compasso a trissectriz de um ângulo com medida $\frac{\pi}{3}$ radianos, isto é 60^o.



Consideremos o ângulo $\measuredangle BAC$ de amplitude 60^o.

Os pontos A, B e C existem no plano construtível, pois neste plano é possível construir, com régua não graduada e compasso, triângulos equiláteros.

Podemos supor sem perda de generalidade que o nosso ângulo tem o vértice na origem de um referencial, o lado $\dot{A}B$ é coincidente com o semi-eixo positivo das abcissas O_x e o ponto C está no semiplano superior.

Se fosse possível trissectar o ângulo $\measuredangle BAC$ com régua não graduada e compasso, tal construção seria possível no plano construtível, como já foi dito. Mas de facto não o é, iremos pois mostrar que não existe nenhum ponto D deste plano tal que $B\hat{A}D = 20^{\circ}$.

Suponhamos que existe um tal ponto D.

Façamos $\overline{AD} = 1$.

Seja E o pé da perpendicular a O_x que passa por D. O ponto E é um ponto construtível, cuja abcissa é a mesma que a de D e a ordenada é 0 (zero).

Como a distância entre dois pontos construtíveis é um número construtivel, tem-se que $\overline{DE} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \cos 20^{\circ} = y$ é um número construtível.

Recordemos que[59]:

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \text{ e seja } \theta = 20^{\circ},$$

então

$$\cos(3\times 20^{\circ}) = 4\cos^3(20^{\circ}) - 3\cos(20^{\circ})$$

$$\Leftrightarrow \cos(60^{\circ}) = 4\cos^3(20^{\circ}) - 3\cos(20^{\circ})$$

[59] Anexo I.

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = 4\cos^3(20^\circ) - 3\cos(20^\circ)$, porque $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow 8\cos^3(20^\circ) - 6\cos(20^\circ) - 1 = 0$,

donde $\cos(20^\circ)$ é solução da equação $8y^3 - 6y - 1 = 0$.

Fazendo $x = 2y$, vem que $2\cos(20^\circ)$ é solução da equação $x^3 - 3x - 1 = 0$, pois $8y^3 - 6y - 1 = 0 \Leftrightarrow (2y)^3 - 3(2y) - 1 = 0$.

O polinómio $r(x) = x^3 - 3x - 1$ é mónico e irredutível sobre $\mathbb{Q}$. É mónico porque o coeficiente do termo de maior grau é 1 e irredutível porque não possui raízes racionais. De facto, se a fracção irredutível $\frac{p}{q}$ fosse raiz do polinómio, isto é,

se $\left(\frac{p}{q}\right)^3 - 3\frac{p}{q} - 1 = 0$

então $\frac{p^3}{q^3} - 3\frac{p}{q} - 1 = 0$

ou seja, $p^3 - 3pq^2 - q^3 = 0$.

Usando o resultado demonstrado no Anexo III, concluiríamos que p e q seriam ambos divisores de 1 e portanto cada um deles igual a 1 ou -1, isto é, $\frac{p}{q} = \pm 1$.

Mas nem 1 nem -1 são soluções da equação.

Logo o polinómio é irredutível.

Como o polinómio mínimo de $2\cos(20^\circ)$ sobre $\mathbb{Q}$ tem grau 3, que não é uma potência de 2, concluímos que as suas raízes não são construtíveis, logo o número $\cos(20^\circ)$ não é construtível[60].

Observemos que, neste caso, o problema da trissecção de um ângulo pode ser enunciado da seguinte forma:

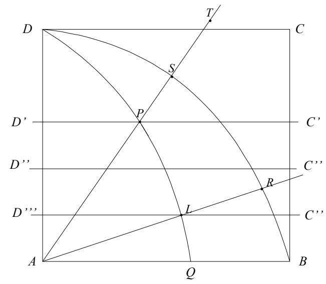
"Dado um segmento de recta como unidade construir b tal que $8b^3 - 6b - 1 = 0$."

60 β é construtível se e só se 2β o for.

2.4.1.3 Processos alternativos para trissectar ângulos arbitrários

Embora não seja possível encontrar uma solução com régua não graduada e compasso, é no entanto possível efectuar a trissecção de um ângulo, arbitrário, recorrendo a elementos mecânicos.

2.4.1.3.1 Trissecção de um ângulo agudo usando a Trissectriz de Hípias [13]



- Dado o ângulo $\measuredangle TAB$ comecemos por construir um quadrado $[ABCD]$, a partir de $[AB]$.
- Construa-se a curva Trissectriz de Hípias e designemos por P, o ponto de intersecção do lado $\overset{\bullet}{AT}$ com esta curva.
- Por P, trace-se uma paralela a $[DC]$ e designe-se por D' o ponto de intersecção dessa paralela com o segmento $[AD]$.
- Trissecte-se o segmento $[AD']$, sendo $[AD''']$ um segmento de recta tal que $\overline{AD'''} = \frac{1}{3}\overline{AD'}$.
- Por D''' trace-se uma outra paralela a $[DC]$ e designe-se por L o ponto de intersecção dessa paralela com a Trissectriz de Hípias.

A amplitude do ângulo $\measuredangle LAB$ é a terça parte da amplitude do ângulo $\measuredangle TAB$.

Provemos que $\overset{\bullet}{\boldsymbol{AL}}$ *é trissectriz de* $\measuredangle \boldsymbol{TAB}$.

Comecemos, de acordo com a figura anterior, por designar por S e R os pontos de intersecção de $\overset{\frown}{DB}$ com as rectas AP e AL, respectivamente, e por C' e C''' os pontos de intersecção do lado $[BC]$ com as rectas $D'P$ e $D'''L$, respectivamente.

Note-se que $D'C'$ e AS se intersectam num ponto da Trissectriz de Hípias, P, e que $D'''C'''$ e AR se intersectam noutro ponto desta curva, L.

Pela propriedade da curva Trissectriz de Hípias, é válida a relação

$$\frac{\overline{AD'}}{\overline{AD'''}} = \frac{\overset{\frown}{SB}}{\overset{\frown}{RB}}$$

e como a amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados tem-se ainda que $\dfrac{\overset{\frown}{SB}}{\overset{\frown}{RB}} = \dfrac{P\hat{A}B}{L\hat{A}B}$.

Então como $\overline{AD'''} = \frac{1}{3}\overline{AD'}$ também $L\hat{A}B = \frac{1}{3}P\hat{A}B$.

Notemos que se reduziu uma questão de proporcionalidade entre ângulos a uma questão de proporcionalidade entre segmentos de recta, ou seja, reduzimos a questão da multissecção de um ângulo agudo à multissecção de um segmento de recta.

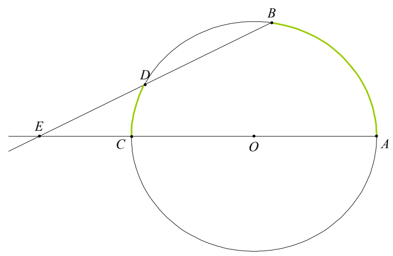
2.4.1.3.2 *A trissecção de um ângulo feita por Arquimedes* ([1], página 108)

Embora não se conheçam construções directamente atribuídas a Arquimedes para a solução do problema da Trissecção de um Ângulo, pelo menos dois dos seus trabalhos indicam a solução para o referido problema: a proposição VIII do *Livro dos Lemas* e a curva espiral definida na obra *Acerca das Espirais*.

A construção da trissecção de um ângulo está descrita na proposição VIII do *Livro dos Lemas* ou *Liber Assumptorum*, que foi preservado numa tradução latina da versão árabe de Thabit ibn Qurrah.

Proposição VIII

"Se por um lado $[BD]$ for uma corda num círculo de centro O, e se $[BD]$ for prolongada até E de modo a que $\overline{DE}$ seja igual ao raio; se por outro lado, $[EO]$ intersectar o círculo em C e for prolongado de modo a intersectar o círculo uma segunda vez em A, o arco AB será igual a três vezes o arco DC."



Em linguagem moderna podemos escrever a proposição anterior da seguinte forma.

Seja $[BD]$ uma corda de uma circunferência de centro O e raio r.

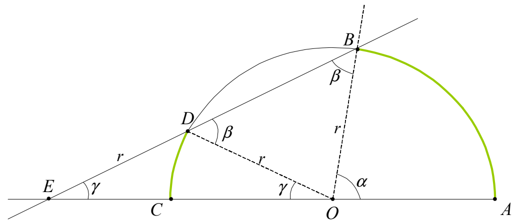
Seja E um ponto de $\dot{B}D$ tal que $\overline{DE} = r$.

Sejam C e A os pontos da intersecção de $\dot{E}O$ com a circunferência, estando C entre O e E.

Então $\overset{\frown}{AB} = 3.\overset{\frown}{DC}$.

A demonstração da proposição, que se segue, é uma pequena variação da apresentada naquele texto, mas a ideia é a mesma.

Seja α um ângulo qualquer e O o seu vértice.



Num dos seus lados escolha-se um ponto A, e com centro O e raio $r=\overline{OA}$, tracemos uma circunferência.

Seja B a intersecção da circunferência com o outro lado do ângulo α e seja C o ponto diametralmente oposto a A.

Prolongue-se $[OC]$ além de C.

Façamos duas marcas sobre a nossa régua, de modo que a distância entre elas seja r, sendo L a marca à esquerda e R à direita.

Colocamos agora a régua de maneira a que ela passe por B e que R esteja sobre o arco $\overset{\frown}{CB}$ do círculo.

Movamos ainda a régua de tal maneira que a marca R se desloque sobre a circunferência mantendo a régua a passar por B até que a marca L caia sobre a extensão de $[OC]$.

A recta BD representa esta posição da régua, isto é, passa por B e $\overline{DE}=r$, sendo D um ponto da circunferência e E um ponto de $\dot{O}C$.

Seja $\gamma=D\hat{E}O$ e $\beta=B\hat{D}O$. Os triângulos $[EDO]$ e $[BDO]$ são isósceles, portanto $D\hat{O}E=D\hat{E}O=\gamma$ e $D\hat{B}O=B\hat{D}O=\beta$

Mostremos que o ângulo γ é um terço do ângulo α.

Observemos, em primeiro lugar, que $\beta=O\hat{D}B=2\gamma$, pois a amplitude de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos internos não adjacentes[61].

Além disso,

$$\gamma+\alpha+B\hat{O}D=180^\circ \quad\Leftrightarrow\quad B\hat{O}D=180^\circ-\alpha-\gamma \qquad (1)$$

e
$$2\beta+B\hat{O}D=180^\circ \quad\Leftrightarrow\quad B\hat{O}D=180^\circ-2\beta \qquad (2)$$

De (1) e (2) vem $180^\circ-\alpha-\gamma=180^\circ-2\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma=2\beta$.

[61] Teorema T2_Resultados Preliminares.

Como $\beta = 2\gamma$ temos $\alpha + \gamma = 2 \times 2\gamma \Leftrightarrow \alpha = 3\gamma$.

Provou-se, deste modo, que γ é a terça parte de α.

Esta proposição, pelo facto de relacionar arcos e ângulos, fornece-nos um método para reduzir a trissecção de um arco qualquer (e deste modo qualquer ângulo), a um problema de Construção de Nêusis[62].

Mas como a trissecção de um ângulo não pode ser efectuada usando a régua não graduada e compasso, esta construção foi possível porque usámos uma operação não permitida que foi fazer duas marcas sobre a nossa régua, ou seja a régua foi usada para medir e não apenas para traçar rectas.

Esta operação permite-nos ajustar um segmento de recta entre duas curvas dadas (neste caso o semicírculo e uma recta) enquanto o seu prolongamento passa por um ponto dado (no nosso caso B). A adição desta nova operação às operações ordinárias tornou possível a resolução de vários novos problemas, nomeadamente o que acabámos de tratar.

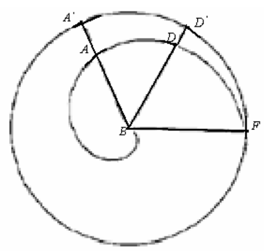
2.4.1.3.3 A trissecção de um ângulo usando a Espiral de Arquimedes

Assim como na construção da Trissectriz de Hípias a trissecção do ângulo resulta da proporcionalidade entre a distância em linha recta e a distância angular. Isto é, atendendo a que se reduziu a proporcionalidade entre ângulos à proporcionalidade entre segmentos, a curva Espiral de Arquimedes também permite reduzir a divisão de ângulo à divisão de um segmento de recta e neste caso particular reduzir a trissecção de um ângulo à trissecção de um segmento de recta.

Na obra *Acerca das Espirais*, na proposição XIV, Arquimedes, usando a definição da Espiral que tem o seu nome, apresenta um resultado que contribui para a construção de uma solução para o problema da trissecção do ângulo.

Proposição XIV

"Se a partir da origem da espiral traçarmos duas linhas rectas até encontrarem a circunferência do primeiro círculo[63], então as linhas traçadas até à espiral terão entre si a mesma razão que os arcos da circunferência entre a extremidade da



[62] Inserção de um segmento de recta de comprimento pré definido entre duas curvas, de modo que um ponto fixo se encontre ou nesse segmento ou no seu prolongamento.

[63] Círculo descrito em torno do ponto origem da espiral com raio igual ao segmento de recta que o ponto móvel percorre durante a primeira revolução.

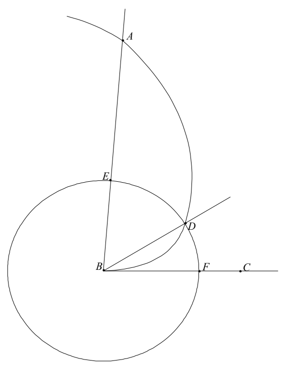
espiral[64] e as extremidades[65] das rectas prolongadas até encontrarem a circunferência, sendo os arcos medidos para a frente[66] a partir da extremidade da espiral.” ([13], página 26)

O que caracteriza o uso da espiral de Arquimedes para trissectar o ângulo, é o facto de a distância ρ entre a origem da espiral, B, e o ponto sobre a espiral, A, ser proporcional ao ângulo θ cujos lados são a semi-recta $\overset{\bullet}{B}F$ e a semi-recta $\overset{\bullet}{B}A$.

Aplicando a Proposição XIV tem-se que:

Se A e D são dois pontos da espiral no primeiro círculo, então $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BA}} = \dfrac{\widehat{FD'}}{\widehat{FA'}}$ (estes arcos são medidos no sentido horário, que é o do crescimento da espiral da figura anterior).

Ora, dado um ângulo agudo $\measuredangle ABC$, que se pretende trissectar, constrói-se a Espiral de Arquimedes cuja origem é o vértice do ângulo em causa, isto é, ponto B, fazendo coincidir um dos lados do ângulo, por exemplo o lado $\overset{\bullet}{B}C$, com a recta inicial e intersectando a espiral com o outro lado do ângulo, o lado $\overset{\bullet}{B}A$, no ponto A. Como o nosso objectivo é trissectar o ângulo vamos trissectar $[AB]$.



Designemos por E o ponto de $\overset{\bullet}{B}A$ tal que $\overline{BE} = \frac{1}{3}\overline{BA}$. Com centro no ponto B, construímos a circunferência de raio $\overline{BE}$, a qual intersecta a Espiral de Arquimedes no ponto D. Deste modo, $D\hat{B}F = \frac{1}{3} A\hat{B}C$.

Provemos este facto.

[64] O ponto F, na figura ao lado. Ponto de intersecção da espiral com o 1.º ciclo.

[65] A' e D'

[66] No sentido de crescimento da espiral.

A espiral relaciona a medida do comprimento do segmento de recta, que designamos por ρ com o ângulo θ determinado pelo segmento de recta $[BD]$ a partir da posição inicial. Em coordenadas polares tem-se que $\rho = k\,\theta$, com $k \in \Re^+$.

Como os pontos A e D são dois pontos da espiral vem que $\overline{BA} = k\theta_1$ e $\overline{BD} = k\theta_2$, sendo $\theta_1 = A\hat{B}C$ e $\theta_2 = D\hat{B}C$.

Mas E foi construído de modo que $\overline{BA} = 3\overline{BE} = 3\overline{BD}$ [67],

donde,

$$k\theta_1 = 3k\theta_2,$$

isto é, $\theta_2 = \dfrac{\theta_1}{3}$.

E concluímos deste modo que $D\hat{A}B = \dfrac{1}{3}A\hat{B}C$.

Observemos que se quisermos dividir um ângulo noutro número de partes o processo é análogo.

Esta construção, no entanto, não preenche o requisito de trissectar um ângulo com régua não graduada e compasso, uma vez que não é possível construir a Espiral de Arquimedes só com estes instrumentos.

2.4.2 Quadratura do Círculo

O problema da Q*uadratura do Círculo* é o mais antigo dos três problemas clássicos da antiguidade.

A primeira referência a esse problema encontra-se num texto do biógrafo Plutarco[68], onde relata que Anaxágoras de Clazomenes (500-428 a.C.), enquanto permaneceu na prisão (por ter dito que o sol não era uma divindade) entretinha-se a descobrir a relação entre o círculo e o quadrado.

Em notação moderna o problema da *Quadratura do Círculo* consiste em resolver a equação $a^2 = \pi\, r^2$ em ordem a a, onde a representa o lado do quadrado e r o raio do círculo. A resolução deste problema pode reduzir-se à determinação do valor de π, razão constante entre o perímetro e a medida do comprimento do diâmetro de uma circunferência. Mas, embora houvesse o conhecimento da existência desta razão constante entre o perímetro e o diâmetro de qualquer circunferência, e da mes-

[67] E e D estão sobre a mesma circunferência

[68] Plutarco de Queroneia (45-120 d.C.), filósofo e biógrafo grego do período greco-romano, estudou na Academia de Atenas (fundada por Platão).

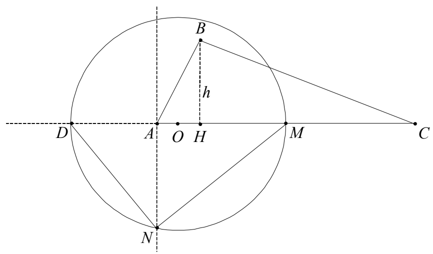
ma forma o conhecimento da existência de uma razão constante entre a área do círculo e o quadrado do seu raio, foi Arquimedes o primeiro a mostrar que essas duas razões constantes tinham por sua vez uma relação entre si, eram ambas iguais a π.

No seu livro sobre a medida da circunferência, Arquimedes prova que $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$ e, demonstrou que: "A área de qualquer círculo é igual à área de um triângulo rectângulo em que um dos catetos é igual ao raio e outro é igual ao perímetro do círculo."[69]

Como é possível para qualquer triângulo construir, com régua não graduada e compasso, um quadrado de igual área podemos concluir que <u>a quadratura do círculo se reduz à rectificação de uma circunferência</u>.

[Vejamos então como construir um quadrado de área igual a um dado triângulo.

Seja $[ABC]$ um triângulo dado.



Denote-se por H o pé da perpendicular a $[AC]$ que passa por B.

Sejam $\overline{BH} = h$ e $\overline{AC} = b$. Então a área do triângulo $[ABC]$ é $\frac{b \times h}{2}$.

Denote-se por M o ponto médio de $[AC]$ e a partir de A prolongue-se (para o lado oposto de C) o segmento $[AC]$. Sobre este prolongamento marque-se um ponto D, de modo que $\overline{AD} = h$.

Determine-se o ponto médio de $[DM]$ e denote-se esse ponto por O.

Trace-se a circunferência de centro O e raio $\overline{OM}$.

Por A trace-se uma recta perpendicular a $[AC]$ e seja N o ponto de intersecção dessa recta com a circunferência.

O triângulo $[DNM]$ é rectângulo em N, pois está inscrito numa semicircunferência. Então a altura em relação à hipotenusa é meio proporcional entre $\overline{DA}$ e $\overline{AM}$[70] donde

$\frac{\overline{DA}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AM}}$,

[69] Teorema T7_Resultados preliminares.
[70] Teorema T6_Resultados preliminares

ou seja, $\overline{DA}\times\overline{AM}=\left(\overline{AN}\right)^2$.

Como $\overline{DA}=h$ e $\overline{AM}=\frac{b}{2}$ tem-se $\frac{b\times h}{2}=\left(\overline{AN}\right)^2$.

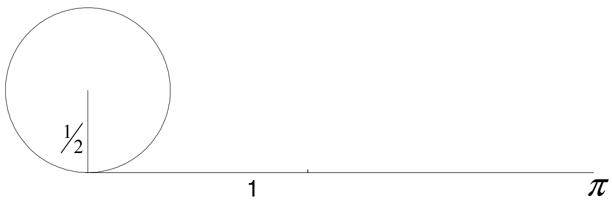
Então o quadrado cujo área é igual à do triângulo $[ABC]$ é o de lado $\overline{AN}$.]

Eduardo Veloso diz-nos que "Se fosse possível construir um segmento de comprimento π o problema estaria resolvido pois o produto de segmentos é uma construção usual em geometria euclidiana.", como foi descrito no início deste capítulo.

Podemos deste modo concluir que a quadratura do círculo está ligada de uma forma especial à natureza do número π.

Vimos anteriormente que, por exemplo, $\sqrt{2}$ embora seja um número não racional é construtível com régua e compasso, assim como $\sqrt{n}$, $\forall n\in IN$. *Mas será que podemos construir um segmento de comprimento π ?*

Podemos começar por construir uma circunferência de raio igual a $\frac{1}{2}$ e depois "rolar" a circunferência sobre uma recta tangente até dar uma volta completa, obtendo assim o que pretendíamos.



Contudo "rolar" uma circunferência não é uma construção admissível, já que a condição inicial era usar apenas régua não graduada e compasso.

De seguida iremos mostrar a impossibilidade de quadrar um círculo com régua não graduada e compasso e alguns processos alternativos para o fazer.

2.4.2.1 Impossibilidade de quadrar um círculo

Suponhamos, sem perda de generalidade, que queremos quadrar o círculo de raio 1.

A área deste círculo será π.

Temos que construir um quadrado de lado $\sqrt{\pi}$. Mas como vimos π é transcendente sobre $\mathbb{Q}$, logo $\sqrt{\pi}$ também é transcendente sobre $\mathbb{Q}$, pois se fosse algébrico também o seria $\sqrt{\pi}\times\sqrt{\pi}=\pi$.

Usando o Teorema que afirma que: *"Se um número real a é construtível, então a é algébrico e o grau do polinómio mínimo de a sobre $\mathbb{Q}$ é uma potência de 2"*, podemos afirmar a impossibilidade da quadratura do círculo, já que π não é algébrico, é transcendente.

2.4.2.2 Alguns processos alternativos para quadrar o círculo

Embora não seja possível efectuar a quadratura do círculo com régua não graduada e compasso é possível fazê-lo usando outros processos.

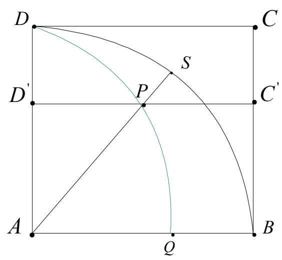
Vejamos três soluções distintas para quadrar o círculo e como em cada uma se abordou a questão. As soluções dadas por:

- Dinóstrato[71], usando uma quadratriz;
- Arquimedes, usando a espiral cuja invenção lhe é atribuída;
- Eduardo Veloso.

2.4.2.2.1 A solução de Dinóstrato

A *Dinóstrato* foi atribuída uma resolução da quadratura do círculo que utiliza a curva usada por Hípias para trissectar o ângulo. ([5], página 295)

Observemos a figura ao lado e vejamos de que modo é que podemos usar a quadratriz para fazer a quadratura do círculo.



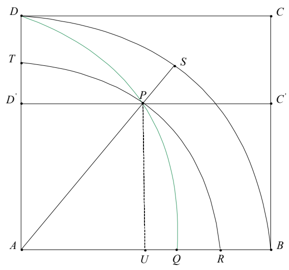
Suponhamos que temos traçada a quadratriz e determinado o ponto Q, o ponto de intersecção da quadratriz com o lado $[AB]$. Um teorema demonstrado por Papo e atribuído por Heath a Dinóstrato afirma que o lado do quadrado é o meio proporcional entre o comprimento do arco da circunferência, $comp\ \widehat{DB}$, e $\overline{AQ}$, isto é $\dfrac{comp\ \widehat{DB}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AQ}}$.

Este resultado permite construir um segmento de recta igual à quarta parte do perímetro da circunferência de raio $\overline{AB}$ e a prova foi feita por dupla redução ao

[71] Dinóstrato (390 -320 a.C.), para além da quadratura do círculo utilizando a trissectriz de Hípias, e do facto de ser irmão de Menecmo, pouco mais se sabe de Dinóstrato, que é referido por Proclo como tendo contribuído par tornar "a geometria ainda mais perfeita".

absurdo, ou seja, para provar que $\dfrac{comp\ \widehat{DB}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AQ}}$ iremos provar que não podemos ter $\dfrac{comp\ \widehat{DB}}{\overline{AB}} < \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AQ}}$ nem $\dfrac{comp\ \widehat{DB}}{\overline{AB}} > \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AQ}}$.

1.º Iremos supor que $\dfrac{comp\ \widehat{DB}}{\overline{AB}} < \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AQ}}$, ou seja, que $\dfrac{comp\ \widehat{DB}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AR}}$ onde $\overline{AR} > \overline{AQ}$ e *R* é o ponto de $]AB[$ que está entre Q e B.



Seja P o ponto de intersecção da circunferência de centro A e raio $\overline{AR}$ com a quadratriz e T a intersecção da mesma circunferência com o lado $[AD]$ do quadrado.

De P baixamos a perpendicular ao lado $[AB]$ e seja U o ponto de intersecção dessa perpendicular com $[AB]$.

Como os comprimentos dos arcos de círculo correspondentes são proporcionais aos raios tem-se que $\dfrac{comp\ \widehat{DB}}{\overline{AB}} = \dfrac{comp\ \widehat{TR}}{\overline{AR}}$, e como por hipótese $\dfrac{comp\ \widehat{DB}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AR}}$ podemos concluir que

(i) $comp\ \widehat{TR} = \overline{AB}$.

Pela propriedade que define a trissectriz sabemos que $\dfrac{comp\ \widehat{DB}}{comp\ \widehat{SB}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD'}}$.

Mas $\dfrac{comp\ \widehat{TR}}{comp\ \widehat{PR}} = \dfrac{comp\ \widehat{DB}}{comp\ \widehat{SB}}$, então $\dfrac{comp\ \widehat{TR}}{comp\ \widehat{PR}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD'}}$.

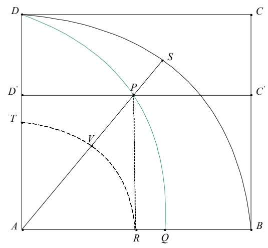
Como $\overline{AD'} = \overline{PU}$ tem-se $\dfrac{comp\ \widehat{TR}}{comp\ \widehat{PR}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{PU}}$.

Logo, como $comp\ \widehat{TR} = \overline{AB}$, por (i), segue-se que $comp\ \widehat{PR} = \overline{PU}$, o que é evidentemente falso, pois a perpendicular é mais curta que qualquer outro segmento ou curva indo de P à recta AB. Portanto o quarto termo, $\overline{AR}$, na proporção $\dfrac{comp\ \widehat{DB}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AR}}$, não pode ser maior que $\overline{AQ}$.

De modo semelhante provaremos que este quarto termo da proporção não pode ser menor que $\overline{AQ}$.

2.º Suponhamos agora que $\dfrac{comp\ \widehat{DB}}{\overline{AB}} > \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AQ}}$, ou seja, que $\dfrac{comp\ \widehat{DB}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AR}}$

onde $\overline{AR} < \overline{AQ}$ e R é o ponto de $]AB[$ que está entre Q e A.



Seja T o ponto de intersecção da circunferência de centro A e raio $\overline{AR}$ com o lado $[AD]$, P o ponto de intersecção da quadratriz com a perpendicular a $[AB]$ que passa pelo ponto R e V o ponto de intersecção de $\dot{A}P$ com a circunferência de centro A e raio $\overline{AR}$.

Como os comprimentos dos arcos de círculo correspondentes são proporcionais aos raios tem-se que $\dfrac{comp\ \widehat{DB}}{\overline{AB}} = \dfrac{comp\ \widehat{TR}}{\overline{AR}}$, e como por hipótese $\dfrac{comp\ \widehat{DB}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AR}}$ vem $\dfrac{comp\ \widehat{TR}}{\overline{AR}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AR}}$.

Donde

(ii) $comp\ \widehat{TR} = \overline{AB}$.

Pela Propriedade da quadratriz sabemos que $\dfrac{comp\ \widehat{DB}}{comp\ \widehat{SB}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AD'}}$, ou equivalentemente $\dfrac{comp\ \widehat{DB}}{comp\ \widehat{SB}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD'}}$.

Mas $\dfrac{comp\ \widehat{TR}}{comp\ \widehat{VR}} = \dfrac{comp\ \widehat{DB}}{comp\ \widehat{SB}}$

Então $\dfrac{comp\ \widehat{TR}}{comp\ \widehat{VR}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD'}}$.

Como $\overline{AD'} = \overline{PR}$ tem-se que $\dfrac{comp\ \widehat{TR}}{comp\ \widehat{VR}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{PR}}$.

Mas por (ii) conclui-se que $comp\ \widehat{VR} = \overline{PR}$.

O que não é verdade, pois sendo $\alpha \in 1.^{\mathrm{o}}Q$ o ângulo que AP faz com o eixo dos $x's$ é tal que :

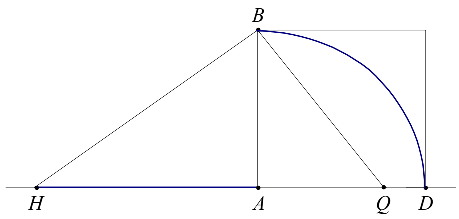
$$sen\,\alpha < \alpha < tg\,\alpha$$ [72]

Portanto o Teorema de Dinóstrato está provado.

Isto é, $\dfrac{comp\ \widehat{DB}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AQ}}$.

Assim, dada uma circunferência, podemos construir a quadratriz referente a um dos seus quadrantes e determinar, a partir da igualdade demonstrada anteriormente e por um processo semelhante ao da construção da soma, da divisão, da multiplicação e da raiz quadrada de segmentos, um segmento com o comprimento de um arco com um quarto do perímetro da circunferência, vejamos de que forma.

Ora, dados os pontos A, B e Q construímos um triângulo rectângulo em B sendo $[BQ]$ um dos catetos e $[AB]$ a altura referente à hipotenusa. Para isso unimos Q com B e traça-se por B uma perpendicular a $[BQ]$.



O ponto de intersecção dessa recta com $[AQ]$ determina o ponto H e $\overline{AH} = comp\ \widehat{BD}$, porque pela semelhança de triângulos tem-se que $\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AQ}}$ e pelo Teorema de Dinóstrato $\dfrac{comp\ \widehat{DB}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AQ}}$.

Construímos deste modo um segmento de recta cuja medida do comprimento é igual à medida do comprimento de $\widehat{BD}$.

O resultado descoberto por Dinóstrato não nos dá directamente a quadratura do círculo, dá-nos sim um processo que nos permite rectificar a circunferência.

[72] Estamos a supor que a amplitude α se exprime em radianos. A medida da amplitude em radianos exprime-se pelo mesmo número que o comprimento do arco da circunferência unitária por definição de radiano. Demonstração de que $\alpha < tg\,\alpha$ no Anexo IV.

2.4.2.2.2 A solução de Arquimedes usando a espiral

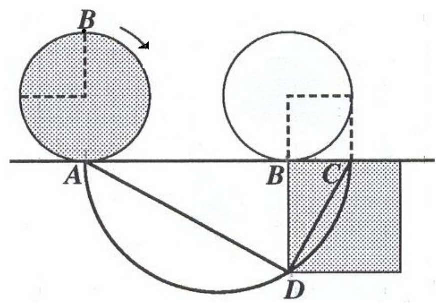
No século seguinte àquele em que Dinóstrato viveu, Arquimedes de Siracusa estabeleceu a ligação entre as duas questões, a da quadratura do círculo e a da rectificação da circunferência, ao construir[73], usando a espiral, um segmento de comprimento igual ao de uma circunferência dada e, em consequência, um triângulo de área igual à do círculo dado.

E assim ficou resolvido o problema da quadratura de um círculo.

2.4.2.2.3 A solução apresentada por Eduardo Veloso [12]

Façamos "rolar" um círculo sobre uma recta tangente.

Seja A o ponto de tangencia inicial e B o ponto da circunferência diametralmente oposto.



Quando o ponto B, no movimento de círculos, atinge a recta tangente, paramos o movimento.

O segmento $[AB]$ marcado sobre a recta tangente é tal que $\overline{AB} = \pi r$, metade do perímetro do círculo (designamos o raio por r).

Seja C um ponto da tangente tal que $\overline{BC} = r$ e B está entre A e C.

$\overline{BD}$ por um lado é a medida do comprimento do lado do quadrado, por outro é a altura do triângulo rectângulo $[ABC]$ e portanto tem-se que[74]:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi\, r}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{r} \quad \Leftrightarrow \quad \pi\, r \times r = \overline{BD}^2 \Leftrightarrow \quad \overline{BD}^2 = \pi\, r^2 .$$

Ou seja, a área do quadrado é igual à área do círculo.

2.4.3 Duplicação do Cubo

Conta Eratóstenes que, certa vez na antiga Grécia, os habitantes da ilha de Delos[75] perguntaram ao oráculo de Apólo o que fazer para combater uma peste que assolava o povo, ao que este respondeu que o altar de Apólo, de forma cúbica, devia ser duplicado. Assim teria nascido o problema

[73] Resultado da página 52

[74] Teorema da altura

[75] Pequena ilha de Delos (grego: Δήλος, Dilos), situa-se aproximadamente no centro do grupo de ilhas do Mar Egeu conhecido como Cíclades, tendo servido como santuário de Apolo na Antiguidade Clássica, e sendo considerada mesmo o berço desse deus, bem como de Artemis. Foi também a sede da Liga de Delos, que congregava os aliados de Atenas contra Esparta, e onde primeiramente esteve guardado o tesouro da Liga. Foi declarada património mundial da Humanidade pela Unesco em 1990.

geométrico da duplicação do cubo, também conhecido como “problema deliano”, que se tornou um problema clássico da Antiguidade.

À primeira vista este problema parece ter uma natureza distinta dos dois problemas anteriores, pois trata-se de um problema de geometria no espaço, enquanto a Trissecção de um Ângulo e a Quadratura do Círculo são problemas da geometria plana. Mas, de facto, o que se quer dizer é que, dado um segmento de recta, a aresta do cubo que queremos duplicar, pretende construir-se um segmento de recta tal que um cubo que tenha esse segmento como aresta tenha o dobro do volume do cubo inicial.

Numerosas foram as soluções apontadas usando todo o tipo de artifícios, já no séc. V a.C., Arquitas fez uma construção tridimensional. Entretanto o problema torna-se famoso quando considerado sobre a restrição de ser resolvido num número finito de passos usando somente a régua não graduada e o compasso. Mas assim como os outros dois problemas da antiguidade, também a duplicação do cubo não é possível só com estes dois instrumentos.

2.4.3.1 Impossibilidade de duplicar o cubo

Se a construção com régua não graduada e compasso fosse possível, ela seria realizável no plano construtível.

Sendo A e B pontos construtíveis e supondo que C e D também são pontos construtíveis tais que $\overline{CD}$ é a medida do comprimento da aresta de um cubo cujo volume é o dobro do volume do cubo de aresta $\overline{AB}$, isto é $\overline{CD}^3 = 2\,\overline{AB}^3$, a equação $x^3 - 2 = 0$ teria uma solução construtível, $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$. Mas já vimos que o grau do polinómio mínimo de um número construtível é uma potência de 2 (que 3 não é).

2.4.3.2 Alguns processos alternativos para duplicar o cubo

À semelhança do que acontecia para os outros dois problemas, embora não seja possível duplicar o cubo usando apenas régua não graduada e compasso é no entanto possível usando outros métodos. Comecemos por verificar que Hipócrates reduziu a duplicação do cubo a um outro problema.

2.4.3.2.1 A Redução de Hipócrates ([13], página 51)

Hipócrates de Quios[76] *foi o primeiro nome a aparecer associado ao problema da duplicação do cubo. Este afirmou e provou que:* "Se entre duas linhas rectas, das quais a maior seja dupla da menor, se inscreverem duas médias em proporção contínua, o cubo ficará duplicado."

Parece, assim, que foi Hipócrates quem deu os primeiros passos no sentido

da resolução do problema da Duplicação do Cubo, ou mais genericamente a ampliação do cubo numa dada razão. Este geómetra reduziu o problema a um outro problema de geometria plana cuja dificuldade de resolução não era menor visto que continuou a não ser possível encontrar uma solução usando apenas régua não graduada e compasso.

No fundo o que Hipócrates afirma é que, dado um cubo de aresta a, se encontrarmos dois segmentos x e y tais que $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$, isto é, se encontrarmos dois meios proporcionais entre os segmentos a e b, então o cubo de aresta x tem o volume ampliado na razão $\frac{b}{a}$.

De facto facilmente se deduz das proporcionalidades anteriores que $x^3=\left(\frac{b}{a}\right)a^3$, pois

(1) $\frac{a}{x}=\frac{x}{y} \Leftrightarrow y=\frac{x^2}{a}$

(2) $\frac{a}{x}=\frac{y}{b} \Leftrightarrow a\,b=x\,y$.

Substituindo em (2) y por $\frac{x^2}{a}$, vem $a\,b=\frac{x^3}{a}$,

ou seja, $x^3=b\,a^2$.

Isto é,

(3) $x^3=\left(\frac{b}{a}\right)a^3$.

Como a Duplicação do Cubo é o caso particular de quando $b=2a$, procuramos assim x e y tais que $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$, isto é x e y tais que $x^3=2a^3$. Mas substituindo b por $2a$ em (3) tem-se $x^3=2a^3$, o que prova que x é a solução do problema, ou seja, o volume do cubo de aresta x é o dobro do volume do cubo de aresta a. Logo a razão entre o volume dos cubos de aresta a e x, respectivamente é 1 para 2, pois

[76] Matemático grego da 2.ª metade do século V a.C.

$$\frac{a^3}{x^3}=\frac{a}{x}\times\frac{a}{x}\times\frac{a}{x}=\frac{a}{x}\times\frac{x}{y}\times\frac{y}{2a}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}.$$

Sendo assim é evidente a equivalência entre os dois problemas, isto é, a duplicação do cubo e a construção de dois meios proporcionais entre a aresta do cubo inicial e o seu dobro.

É muito provável que a descoberta de Hipócrates tenha tido como base o problema da duplicação do quadrado. *"Embora não haja nenhum testemunho directo desse facto, os historiadores acreditam que Hipócrates começou por reflectir na questão da duplicação do quadrado e que, de seguida, a procurou generalizar."* ([5], página 310).

Segundo Florian Cajori *"Os Pitagóricos mostraram que a diagonal de um quadrado é o lado de outro quadrado com o dobro da área do primeiro. Isto provavelmente sugere o problema da Duplicação do Cubo, isto é, encontrar a aresta de um cubo com o dobro da do cubo dado."*

De facto, se o problema da duplicação do quadrado pode ser reduzido ao problema de encontrar um meio proporcional entre a aresta e o seu dobro, esperava-se que o problema da duplicação do cubo pudesse ser reduzido ao problema de encontrar dois meios proporcionais entre a aresta e o seu dobro. Assim, tendo em conta esta analogia, vamos começar por dar alguma atenção ao problema da duplicação do quadrado.

Seja dado um quadrado de lado a; juntando dois desses quadrados obtemos um rectângulo cuja área é o dobro da do quadrado inicial. A questão que agora se coloca é quadrar este rectângulo, isto é, construir um quadrado com a mesma área do rectângulo em causa.

Esta quadratura resolve-se[77] construindo o meio proporcional, x, entre os segmentos a e $2a$. E construir um meio proporcional com régua não graduada e compasso não era difícil para os geómetras da época[78].

Repare-se que da proporção $\frac{a}{x}=\frac{x}{2a}$ deduzimos que $x^2=2a^2$, o que prova que a área do quadrado de lado x é o dobro da do quadrado de lado a. O comprimento da diagonal do quadrado de lado a é $x=\sqrt{2}\,a$.

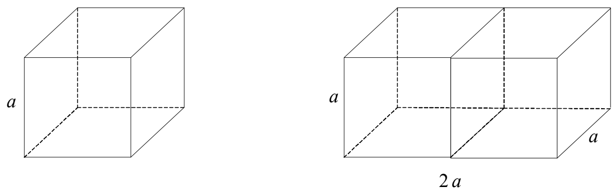
---

[77] Um outro processo mencionado no diálogo Menon, de Platão, escrito no séc. IV a.C., refere que o lado procurado é a diagonal do quadrado inicial.

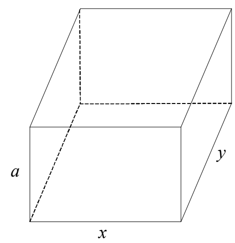
[78] Ver construção com régua não graduada e compasso da raiz quadrada de um número, no início deste capítulo.

Relativamente ao problema da duplicação do cubo, é possível que Hipócrates tendo como inspiração o problema da duplicação do quadrado tenha efectuado um raciocínio análogo ao seguinte:

1- Consideremos um cubo de lado a; juntando dois desses cubos obtemos um paralelepípedo de arestas $2a$, a e a, cujo volume é o dobro do volume do cubo inicial.



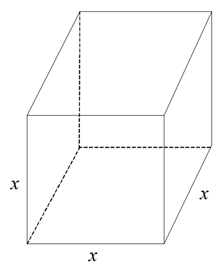
2- Suponhamos, agora, que pretendemos transformar o paralelepípedo noutro com o mesmo volume, a mesma altura a, mas com uma das arestas da base x. Tendo em atenção que o volume terá de se manter o mesmo, a outra aresta da base terá de se alterar, designemo-la por y.



Como o volume e a altura dos sólidos das últimas duas figuras se mantiveram, vem que[79] $xy = 2a^2$, donde

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{2a} \qquad (1)$$

3- Finalmente vamos transformar o paralelepípedo da figura anterior num cubo, mantendo o volume, mas de aresta x.



Assim, a face de arestas a e y transformou-se numa face quadrada de aresta x mas com a mesma área, donde, $ay = x^2$ e assim vem que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \qquad (2)$$

4- De (1) e (2) deduzimos então, como pretendíamos, que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$.

Depois de Hipócrates ter mostrado que o problema da duplicação do cubo se podia reduzir ao problema de encontrar dois meios proporcionais entre a aresta do cubo dado e o dobro desta, todo o esforço posterior foi no sentido de encontrar uma construção para os dois meios proporcionais em cau-

[79] A área das bases tem que ser igual pois são paralelepípedos com a mesma altura e o mesmo volume.

sa. Estas buscas trouxeram um grande desenvolvimento da matemática, sendo um exemplo de tal facto a "(...) descoberta (ou, pelo menos, estudo atento) das secções cónicas." ([5], página 311).

2.4.3.2.2 A solução de Menecmo ([6], página 47).

Menecmo, matemático do século IV a.C., é conhecido essencialmente pelo estudo que fez das curvas que hoje conhecemos pelo nome de cónicas – elipse, parábola e hipérbole; nomeadamente pela descoberta de que estas curvas se podem obter por intersecção dum cone recto de base circular, com um plano perpendicular a uma geratriz.

As descobertas de Menecmo são consequência da procura de uma solução para o problema da duplicação do cubo, mais propriamente, da procura de curvas que possuíssem as propriedades adequadas para resolver o problema de encontrar os dois meios proporcionais da redução de Hipócrates. As soluções de Menecmo, preservadas por Eutócio[80], têm por base a construção de um certo ponto como a intersecção de duas cónicas, num dos casos uma parábola e uma hipérbole equilátera[81], no outro caso duas parábolas.

A prova que chegou até nós não reproduz as palavras de Menecmo e é possível que tenha sido «remodelada» por Eutócio na sua própria linguagem ou por algum seu antecessor, tendo em conta que utiliza termos que só mais tarde foram introduzidos por Apolónio (séc. III a.C.) ou por Aristeu (séc. IV a.C.). ([13], página 65).

Atendendo à redução feita por Hipócrates, o problema que então se coloca é o de determinar dois meios proporcionais entre dois segmentos a e $2a$ (sendo a a aresta do cubo a duplicar), ou seja, a determinação de x e y tais que

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a} \qquad (1)$$

Na linguagem da actual geometria analítica é fácil reconhecer que para se verificar a relação anterior basta que se verifiquem duas das três equações seguintes:

$$x^2 = ay \Leftrightarrow y = \frac{1}{a}x^2 \qquad (2)$$

$$xy = 2a^2 \qquad (3)$$

$$y^2 = 2ax \Leftrightarrow x = \frac{1}{2a}y^2 \qquad (4)$$

---

[80] Eutócio de Áscalon, é um comentador do início do século VI d.C., que no seu trabalho Sobre a Esfera e o Cilindro de Arquimedes, arquiva os principais conhecimentos históricos que hoje possuímos sobre o problema da duplicação do cubo.

[81] Uma hipérbole é chamada equilátera quando as medidas dos semi-eixos reais e imaginário são iguais.

Então podemos obter x de duas formas diferentes:

(i) como abcissa do ponto de intersecção da parábola $y=\frac{1}{a}x^2$ com a hipérbole equilátera $xy=2a^2$, primeira solução de Menecmo;

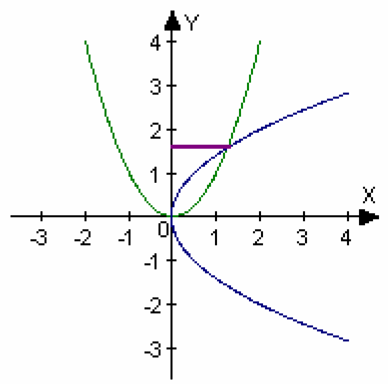
(ii) como abcissa do ponto de intersecção da parábola $y=\frac{1}{a}x^2$ com a parábola $x=\frac{1}{2a}y^2$, segunda solução de Menecmo.

Em ambos os casos se conclui que $x^3=2a^3$, ou seja, x é a aresta do cubo cujo volume é o dobro do volume do cubo dado, de aresta a. Usando as notações actuais estas soluções parecem simples, mas para Menecmo que não tinha como instrumento a geometria analítica – um legado de Descartes no séc. XVII – são muito elaboradas, e não é de admirar que tenham exigido de Menecmo uma atenção especial às propriedades das curvas em causa.

Exemplifiquemos, com a ajuda da geometria analítica, a duplicação do cubo recorrendo ao uso de duas parábolas.

Consideremos, por exemplo, um cubo de aresta $a=1$, o qual pretendemos duplicar. Procuramos a solução da equação $x^3=2.1^2$, ou seja, pretendemos construir um segmento x cujo comprimento seja $\sqrt[3]{2}$.

Para tal, vamos desenhar as parábolas $y=x^2$ e $x=\frac{1}{2}y^2$. O seu ponto de intersecção (diferente da origem) tem por abcissa a medida procurada. O segmento x, aresta do cubo procurado, está representado a roxo na figura ao lado.



De modo análogo se encontraria esta medida do comprimento de x se intersectássemos a parábola $y=x^2$ com a hipérbole $xy=2$.

É no entanto importante não esquecer que, embora esteja encontrada a aresta do cubo procurado, esta solução não se restringe ao uso exclusivo da régua não graduada e do compasso, visto que não é possível desenhar todos os pontos de uma parábola ou de uma hipérbole com tais instrumentos.

2.4.3.2.3 A solução atribuída a Platão ([13], página 68)

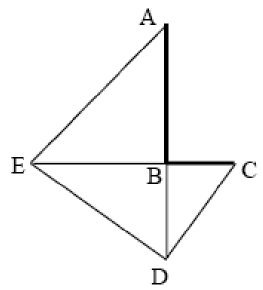
Eutócio atribui a Platão[82] uma solução mecânica para o problema da duplicação do cubo, ou equivalentemente para o problema da inserção de dois meios proporcionais entre dois segmentos de recta.

Pensa-se no entanto que esta solução lhe foi incorrectamente atribuída pois Platão reprovava as soluções mecânicas, já que este entendia que as soluções mecânicas desvirtuavam a geometria. É, portanto, de estranhar que ele próprio apresentasse uma solução dentro dos parâmetros que reprovava.

Existem duas teorias acerca da autoria desta solução atribuída a Platão para resolver o problema da duplicação do cubo. Uma delas defende que Platão inventou esta solução mecânica para ilustrar como é fácil descobrir tais soluções; a outra, talvez a mais aceite, defende que esta solução mecânica foi inventada pelos seus discípulos na Academia.

Vejamos então em que consiste esta solução mecânica.

Considerem-se dois segmentos de recta $[BC]$ e $[AB]$ perpendiculares entre si, entre os quais pretendemos encontrar os dois meios proporcionais. Tendo em atenção que o problema é a duplicação de um cubo de aresta a, vamos aqui considerar o caso particular em que $\overline{AB}$ é o dobro de $\overline{BC}$, isto é, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AB} = 2\,a$.



Como explicaremos de seguida vamos construir os triângulos $[EDC]$ e $[AED]$ rectângulos em D e E, respectivamente, de modo a que $[ED]$ seja comum a ambos. Sejam $[AD]$ e $[EC]$ as hipotenusas que se intersectam perpendicularmente em B, como ilustrado na figura.

Deste modo, os triângulos $[BDC]$, $[AEB]$ e $[BED]$ são semelhantes entre si, tendo em atenção as condições de construção da figura, e aplicando o Teorema T5 demonstrado nos Resultados Preliminares,

Vem

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}$$

ou seja,

[82] Platão, importante filósofo e matemático grego, nasceu em Atenas, provavelmente em 427 a.C. e morreu em 347 a.C. É considerado um dos principais pensadores gregos, pois influenciou profundamente a filosofia ocidental, e o principal promotor do desenvolvimento intelectual do seu tempo.

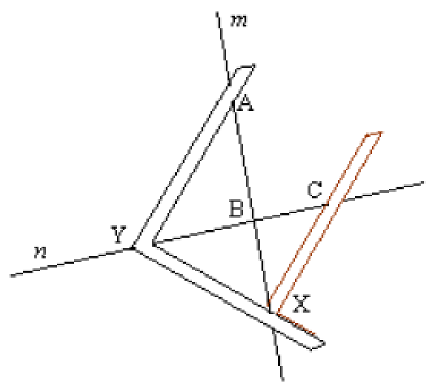
$$\frac{a}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BE}}{2a}.$$

Então $\overline{BD}$ e $\overline{BE}$ são os dois meios proporcionais entre a e $2a$, sendo $\overline{BD}$ a aresta do cubo cujo volume é o dobro do volume do cubo de aresta a. Assim, o problema em causa fica solucionado desde que se construa uma figura nas condições anteriormente descritas.

"O esquadro de Platão, seria um instrumento constituído por três réguas, duas delas paralelas entre si e uma terceira perpendicular às anteriores, estando esta última fixada a uma das primeiras, mas permitindo a deslocação da outra numa calha. Portanto, duas das réguas seriam fixas, enquanto que a outra deslizaria paralelamente a si mesma." ([5], página 311).

Vamos então construir essa figura utilizando o esquadro de Platão. Comecemos por traçar duas rectas perpendiculares m e n que se intersectam num ponto B e marquem-se dois pontos A e C sobre m e n, respectivamente, de modo a que $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ (note-se que estamos a considerar o caso em que $\overline{BC} = a$ é a resta do cubo a duplicar).

De seguida, manipule-se o esquadro de Platão ajustando-o à figura de modo a que as duas réguas paralelas passem por A e C e os pontos em que estas encontram a outra régua, X e Y, estejam sobre as rectas m e n, respectivamente, como ilustra a figura.



Assim, os segmentos de comprimento $\overline{BX}$ e $\overline{BY}$ são os dois meios proporcionais procurados, como anteriormente provámos; sendo $\overline{BX}$ a medida do comprimento da aresta do cubo procurado.

Uma vez mais estamos em presença de uma solução que não está de acordo com as regras previamente estabelecidas, pois a solução em causa envolve um instrumento mecânico (o esquadro de Platão) e não apenas a régua não graduada e compasso.

Poderíamos utilizar muitos outros processos para resolver cada um dos problemas clássicos da antiguidade mas não é esse o objectivo do trabalho. Com este estudo pretendeu-se estudar quando é possível fazer construções geométricas utilizando apenas régua não graduada e compasso, mostrar o contributo que estes problemas deram para o desenvolvimento da Matemática e a importância dos diferentes ramos da matemática e de outras ciências, tais como a física, na resolução de problemas de geometria.

Capítulo III

Construções com Origami

As regras clássicas da régua não graduada e do compasso permitem apenas que um compasso trace arcos e transfira distâncias, e que uma régua não graduada desenhe linhas rectas. Porém, há muitas variações no tema das construções geométricas que incluem o uso de regras definidas de outra forma e outro tipo de ferramentas para além da régua não graduada e do compasso, na construção de figuras geométricas. Uma das variações mais interessantes é o uso de dobragens numa folha de papel. Tal como as construções com régua e compasso, as construções dobrando papel são academicamente interessantes e têm uma utilidade pratica – em particular no Origami, a arte de dobrar folhas de papel em formas interessantes e bonitas. O design moderno do Origami mostrou que é possível obter formas de complexidade, realismo e beleza incrível, a partir de um único quadrado de papel. As figuras do Origami possuem uma beleza estética que atrai tanto o matemático como o leigo. Parte da sua atracção vem da simplicidade do conceito: do mais simples nascem objectos de profunda subtileza e complexidade que muitas vezes podem ser construídas através de uma sequência precisa de passos de dobragens.

Assim, no *Origami*, há um interesse prático em inventar sequências de dobragens para determinar proporções específicas que se misturam com o campo matemático das construções geométricas.

Origami, tal como as construções geométricas com régua não graduada e compasso, tem muitas variações. Na versão mais comum, começa-se com uma folha quadrada de papel sem marcas. Só é permitido dobrar: não se usa o corte. A construção de O*rigami* tem como objectivo localizar precisamente um ou mais pontos no papel, frequentemente nas extremidades da folha, mas também é possível fazê-lo no seu interior. Estes pontos, conhecidos como pontos de referência, são então usados para definir as restantes dobras que moldam o objecto final. O processo baseia-se em dobrar o modelo criando novos pontos de referência, que são gerados por intersecções de dobras ou pontos onde uma dobra bate numa extremidade.

Os diferentes métodos de dobragem usam as mesmas operações básicas, mas utilizam-nas em diferentes combinações: dobre um ponto sobre outro ponto, dobre uma recta sobre outra recta, faça uma dobra a partir de um ou dois pontos.

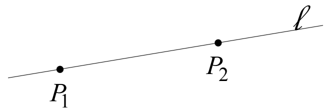
Nos anos setenta, vários "dobradores" começaram a enumerar e sistematizar as possíveis combinações de dobras e a estudar que tipos de distâncias eram construtíveis combinando-as de várias maneiras. O primeiro estudo sistemático foi feito por Humiaki Huzita, que descreveu um conjunto de seis formas básicas de definir uma única dobra considerando várias combinações de pontos, rectas e a própria dobra. Estas seis operações tornaram-se conhecidas como "Os *Axiomas de Huzita*" (HA), embora seja mais correcto designá-las por operações sobre pontos e rectas.

Dado um conjunto de pontos e rectas numa folha de papel, as operações/axiomas de Huzita permitem criar novas rectas; as intersecções entre as primeiras e as novas linhas definem pontos adicionais. O conjunto alargado de pontos e rectas pode ser depois ampliado por aplicação repetida das operações para obter combinações adicionais de pontos e rectas.

3.1 Axiomas/ Operações de Huzita

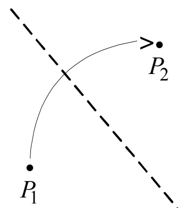
O_1: Dados dois pontos P_1 e P_2 podemos fazer uma dobra pela recta que os une.

(A dobra obtida é a recta definida por P_1 e P_2)



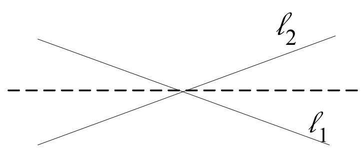
O_2: Dados dois pontos P_1 e P_2 podemos dobrar P_1 sobre P_2.

(A dobra obtida é a mediatriz de $[P_1, P_2]$)



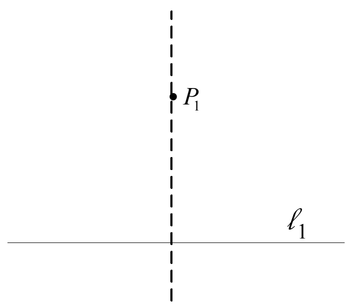
O_3: Dadas duas rectas ℓ_1 e ℓ_2 podemos dobrar ℓ_1 sobre ℓ_2.

(A dobra obtida é a bissectriz dos ângulos definidos pelas rectas ℓ_1 e ℓ_2 se as rectas forem concorrentes, se as rectas forem paralelas obtemos uma recta paralela a ℓ_1 e a ℓ_2 e que está à mesma distância de ambas.)



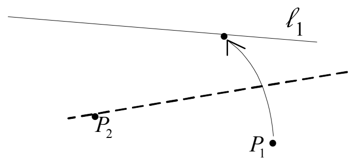
O_4: Dados o ponto P_1 e uma recta ℓ_1 podemos fazer uma dobra perpendicular a ℓ_1 que passa por P_1.

(A dobra obtida é a recta perpendicular a ℓ_1 que passa por P_1)



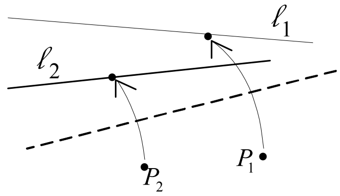
O_5: Dados dois pontos P_1 e P_2 e uma recta ℓ_1 podemos fazer uma dobra que coloca P_1 sobre ℓ_1 e que passa pelo ponto P_2.

(A dobra obtida é a mediana do triângulo $[P_2 P_1 P_1']$ em relação à base $[P_1 P_1']$ onde P_1' é a nova posição de P_1 sobre ℓ_1)



O_6: Dados dois pontos P_1 e P_2 e duas recta ℓ_1 e ℓ_2 podemos fazer uma dobra que coloca P_1 sobre ℓ_1 e P_2 sobre ℓ_2.

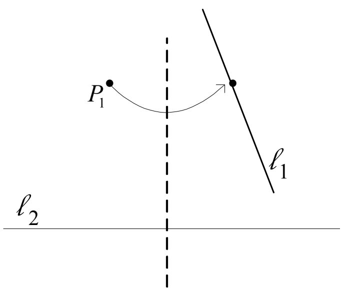
(A dobra obtida é a mediatriz comum de $[P_1 P_1']$ e $[P_2 P_2']$ onde P_1' e P_2' são as novas posições de P_1 e P_2.)



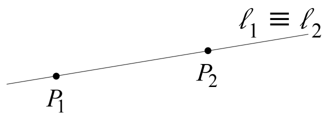
Nota: Os axiomas O_5 e O_6 só são aplicáveis se a distância de P_2 a ℓ_1 for não inferior à distância de P_1 a P_2.

Recentemente foi proposto por Hatori um outro axioma, O_7 que diz:

Dado um ponto P_1 e duas rectas ℓ_1 e ℓ_2, podemos traçar uma perpendicular a ℓ_2 que coloca P_1 sobre ℓ_2.



Hatori provou que esta operação não é equivalente a nenhuma das anteriores. Se considerarmos um conjunto munido com “Os Axiomas de Huzita-Hatori”, este está completo, pois estas são todas as operações que definem uma dobra através do alinhamento finito de pontos e segmentos de recta. Observemos que embora esta axiomática seja completa ela não é independente pois há axiomas dispensáveis. De facto do axioma O_6 decorrem os anteriores. Senão vejamos como escrever cada um dos axiomas anteriores a partir de O_6.



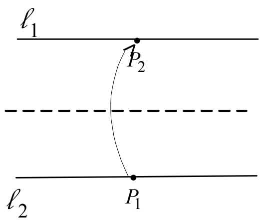
O_1: Dados dois pontos P_1 e P_2 fixos e duas rectas ℓ_1 e ℓ_2 coincidentes podemos fazer uma dobra que mantém fixos P_1 sobre ℓ_1 e P_2 sobre ℓ_2.

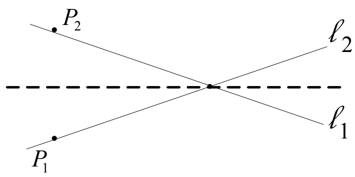
O_2: Dados dois pontos P_1 e P_2 e duas rectas ℓ_2 e ℓ_1 que passam por P_1 e P_2, respectivamente, e são:

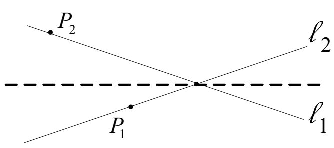
1.º Caso: ambas perpendiculares a P_1P_2;

2.º Caso: concorrentes num ponto equidistante de P_1 e de P_2;

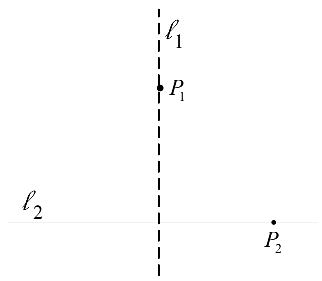
podemos fazer uma dobra que coloca P_1 sobre ℓ_1 (em P_2) e P_2 sobre ℓ_2 (em P_1).





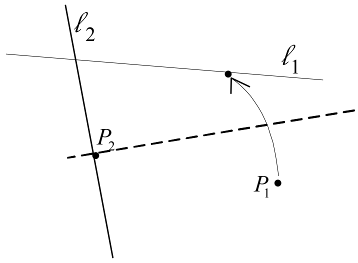


O_3: Dadas duas rectas ℓ_1 e ℓ_2 e dois pontos P_2 em ℓ_1 e P_1 em ℓ_2, podemos fazer uma dobra que coloca P_1 sobre ℓ_1 e P_2 sobre ℓ_2.



O_4: Dados dois pontos P_1 e P_2 e duas recta ℓ_1 e ℓ_2 perpendiculares tais que $P_1 \in \ell_1$ e $P_2 \in \ell_2 \setminus \ell_1$, podemos fazer uma dobra que fixa P_1 sobre ℓ_1 e coloca P_2 noutro ponto de ℓ_2.

O_5: Dados dois pontos P_1 e P_2 e duas recta ℓ_1 e ℓ_2, podemos fazer uma dobra que coloca P_1 sobre ℓ_1 e P_2 e mantém fixo P_2 sobre ℓ_2.

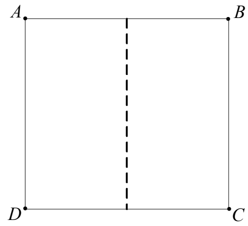


3.2 Construções usando Origami

3.2.1 Triângulo Equilátero

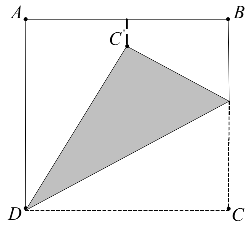
Seja $[ABCD]$ um quadrado.

(1) Dobremos o lado $[BC]$ sobre o lado $[AD]$. (O_3)



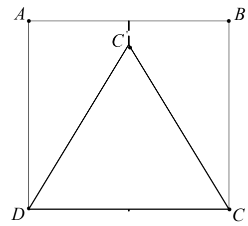
(2) Fixemos o ponto D, dobremos C para que este fique sobre a dobra anterior. (O_5)

Denominemos por C' a nova posição do ponto C.



(3) Façamos duas dobras uma que une D a C' e outra que une C a C'. (O_1)

(4) O triângulo $[C'CD]$ é equilátero.



Provemos este facto.

Por construção

(i) $\overline{DC'} = \overline{DC}$,

e como C' pertence à mediatriz de $[DC]$ tem-se que

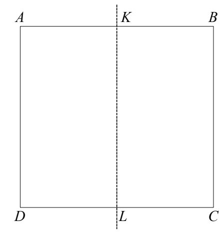
(ii) $\overline{DC'} = \overline{C'C}$.

Logo por (i) e (ii) concluímos que o triângulo $[C'CD]$ tem os lados todos iguais, ou seja é equilátero.

3.2.2 Quadrado inscrito noutro quadrado [21]

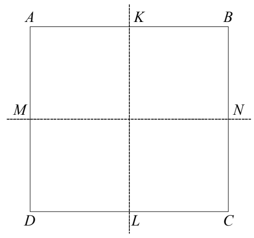
Seja $[ABCD]$ um quadrado.

(1) Dobremos o lado $[BC]$ sobre o lado $[AD]$ e designemos o ponto de intersecção da nova dobra com o lado $[AB]$ por K e com o lado $[DC]$ por L. (O_3)

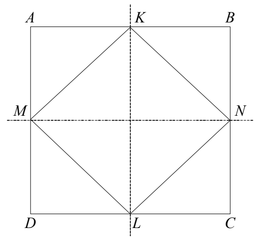


(2) Dobremos, agora, o lado $[CD]$ sobre o lado $[AB]$. (O_3)

Designemos o ponto de intersecção da dobra com o lado $[AD]$ por M e com o lado $[BC]$ por N.



(3) Unindo M a K, K a N, N a L e L a M, obtemos um quadrado inscrito no quadrado inicial.



Provemos que $[MKNL]$ é um quadrado.

Ora,

$\overline{MK} = \overline{KN} = \overline{NL} = \overline{LM}$ porque os triângulos $[AMK]$, $[MDL]$, $[LCN]$ e $[NBK]$ são geometricamente iguais[83] logo os lados correspondentes são geometricamente iguais.

Como estes triângulos são rectângulos e isósceles tem-se que cada ângulo da base mede 45º, então $A\hat{M}K = 45^{o} = D\hat{M}L$.

Como $A\hat{M}D = 180^{o}$, vem que $K\hat{M}L = 180^{o} - 45^{o} - 45^{o} = 90^{o}$.

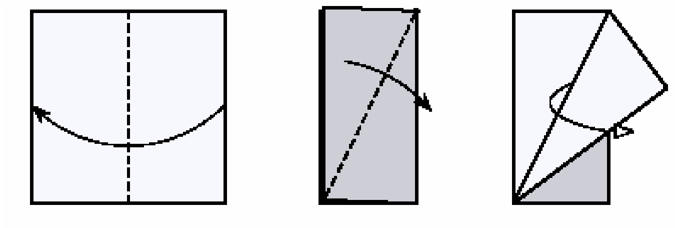
De modo análogo se prova que os outros três ângulos do polígono também são rectos.

Observe-se que se continuarmos a inscrever quadrados dentro dos quadrados a área dos quadrados diminuem em relação à área do quadrado inicial na seguinte ordem $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^n}$.

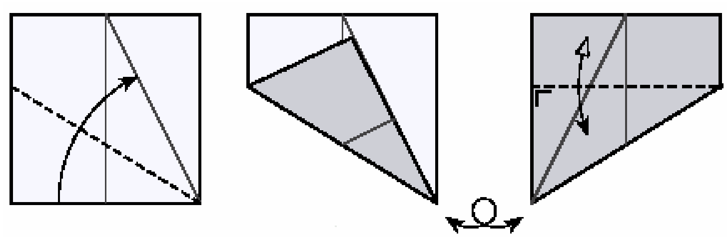
[83] Critério *LAL*.

3.2.3 Rectângulo áureo

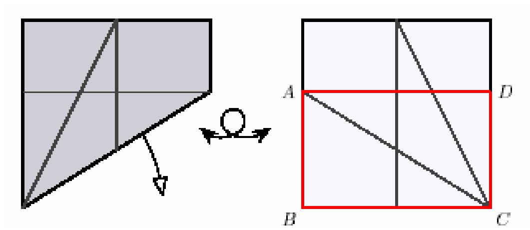
Vejamos como construir um rectângulo áureo a partir de uma folha de papel quadrada. [20]



(1) Aplicando O_3 **(2)** Aplicando O_1 **(3)**



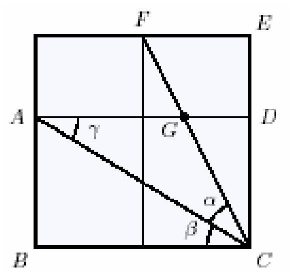
(4) **(5)** Aplicando O_3 **(6)** Aplicando O_4



(7) **(8)** O rectângulo $[ABCD]$ é áureo.

Legenda:

- As partes sombreadas da figura representam a parte de trás da folha.
- O símbolo  significa virar a folha.



Provemos que, de facto, o rectângulo $[ABCD]$ é áureo, para isso analisemos o resultado final.

Iremos determinar a relação entre os lados do rectângulo resultante, $x = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$.

Mas como $\overline{AD} = \overline{EC}$, pois $[AD]$ e $[EC]$ são lados do quadrado, tem-se que $x = \frac{\overline{EC}}{\overline{DC}}$.

Pelo critério *AAA* da semelhança de triângulos, os triângulos $[FEC]$ e $[GDC]$, são semelhantes,

logo $\frac{\overline{EC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{GC}}$,

e por uma propriedade das proporções, demonstrada anteriormente [84], vem $\frac{\overline{EC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{FE}+\overline{FC}}{\overline{GD}+\overline{GC}}$.

Sem perda de generalidade, suponhamos que a medida do comprimento do lado do quadrado inicial é 1.

Então, $\overline{AD} = \overline{EC} = 1$, $\overline{FE} = \frac{1}{2}$, e pelo Teorema de Pitágoras,

$$\overline{FC} = \sqrt{\overline{FE}^2 + \overline{EC}^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Sejam $\alpha = \measuredangle ACF$, $\beta = \measuredangle ACB$ e $\gamma = \measuredangle DAC$

Então,

(1) os ângulos α e β são geometricamente iguais (do passo (4)), e

(2) os ângulos β e γ são alternos internos entre as paralelas AD e BC e, portanto, geometricamente iguais.

Por (1) e (2) vem $\alpha = \gamma$.

Consequentemente, o triângulo $[AGC]$ é isósceles e $\overline{AG} = \overline{GC}$.

Então,

$$\overline{GD} + \overline{GC} = \overline{GD} + \overline{AG} = 1.$$

Substituindo os valores calculados na fórmula acima, obtemos finalmente,

$x = \frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}{1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é o número de ouro.

[84] $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$, página 22.

3.2.4 Pentágono Regular [16]

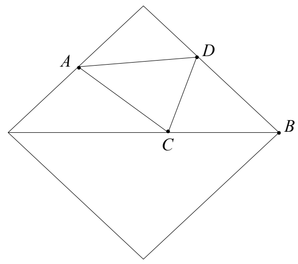
No livro *Amazing Origami*, Kunihiko Kasahara descreve um método ao qual chama ***"O Método Americano"***, para fazer um pentágono dobrando papel.

Começamos com um quadrado de papel.

(1) Dobremos diagonalmente pela metade o quadrado (linha horizontal da figura ao lado). (O_2)

(2) Dobremos um lado ao meio pelo ponto A. (O_1)

(3) Dobremos o quadrado de modo a unir o ponto B ao ponto A, formando a linha CD. (O_1)

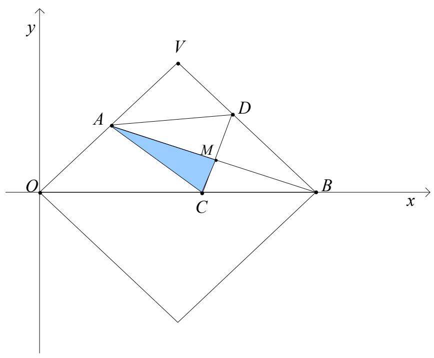


Veremos que $A\hat{C}D \simeq 72^{\circ}$.

Iremos mostrar que, mais precisamente, a amplitude deste ângulo é aproximadamente 71.56º.

Consideremos um referencial xOy, cuja origem coincide com um dos vértices do quadrado.

Sejam V um outro vértice do quadrado e M o ponto médio de $[AB]$.



CD é a mediatriz de $[AB]$, então $\cos A\hat{C}D = \dfrac{\overline{CM}}{\overline{AC}}$.

Sem perda de generalidade, consideremos que a medida do comprimento do lado do quadrado é 1 e determinemos as coordenadas dos pontos representados na figura.

$O=(0,0)$;

$V=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

$A=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$;

$B=\left(\sqrt{2},0\right)$;

$M=\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{8},\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)$.

O vector $\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4},-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ é perpendicular ao vector $\vec{u}=\left(\sqrt{2},3\sqrt{2}\right)$, mas este vector é colinear com o vector $\vec{v}=(1,3)$.

Então a equação da recta CD que tem a direcção de $\vec{v}$ e passa por M é $y-\frac{\sqrt{2}}{8}=3\left(x-\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)$.

Intersectando esta recta com a recta de equação $y=0$ obtemos as coordenadas do ponto C.

$$\begin{cases} y=0 \\ y-\frac{\sqrt{2}}{8}=3\left(x-\frac{5\sqrt{2}}{8}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{8}=3x-\frac{15\sqrt{2}}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ -\sqrt{2}=24x-15\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\frac{7\sqrt{2}}{12} \end{cases}$$

Donde $C=\left(\frac{7\sqrt{2}}{12},0\right)$.

Logo

(i) $\overline{AC}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{7\sqrt{2}}{12}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}-7\sqrt{2}}{12}\right)^2+\frac{2}{4^2}}$

$$=\sqrt{\frac{16\times 2}{12^2}+\frac{2}{4^2}}=\sqrt{\frac{2^5}{2^4\times 3^2}+\frac{1}{2^3}}=\sqrt{\frac{2^4+3^2}{3^2\times 2^3}}=\frac{5}{3\times 2\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{12}.$$

(ii) $\overline{CM}=\sqrt{\left(\frac{7\sqrt{2}}{12}-\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{14\sqrt{2}-15\sqrt{2}}{24}\right)^2+\frac{2}{8^2}}$

$$=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2^3\times 3}\right)^2+\frac{2}{2^6}}=\sqrt{\frac{2}{2^6\times 3^2}+\frac{2}{2^6}}=\sqrt{\frac{20}{2^6\times 3^2}}=\sqrt{\frac{2^2\times 5}{2^6\times 3^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{5}{2^4\times 3^2}}=\frac{\sqrt{5}}{12}.$$

Então por (i) e (ii) vem:

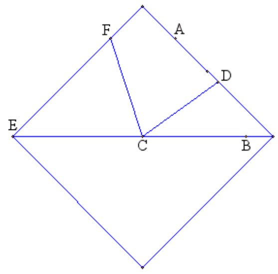
$$\cos A\hat{C}D=\frac{\frac{\sqrt{5}}{12}}{\frac{5\sqrt{2}}{12}}=\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}\simeq 0,3162.$$

e como $\cos(71,56^{\circ})=0,3163$ concluímos que $A\hat{C}D\simeq 71,56^{\circ}$.

Neste mesmo livro é descrito um outro método, ***"O Método Japonês"***, para construir um pentágono usando dobragens.

(1) Dobremos ao meio a diagonal horizontal para obter C . (O_2)

(2) Dobremos ao meio o lado superior direito duas vezes e obtemos A. (O_2)



(3) Dobremos o ponto A sobre a linha BC construindo a linha CD , chamamos B à nova posição do ponto A. (O_2)

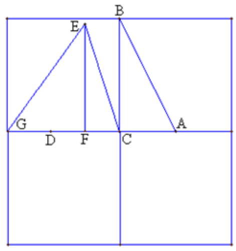
(4) Dobremos CD sobre CE , construindo a linha CF , onde F é o ponto de intersecção desta linha com o lado superior esquerdo.

A amplitude do ângulo $\measuredangle DCF$ é aproximadamente 72º.

Usando a Geometria Analítica prova-se que este ângulo mede aproximadamente 72º.11, que é mais próximo de 72º do que a aproximação encontrada pelo *Método Americano*.

No entanto o método que iremos descrever, não sendo exacto na prática, pois não adquirimos ângulos muito precisos quando dobramos papel, teoricamente é um método exacto.

(1) Dobremos o nosso quadrado de papel em quatro quadrados menores e iguais entre si, como mostra a figura ao lado. (O_2)



- C é o ponto de intersecção das duas dobras;
- B é o ponto de intersecção da dobra vertical com o lado superior do quadrado inicial;
- G é o ponto de intersecção da dobra horizontal com o lado esquerdo do quadrado inicial.

(2) Dobremos ao meio, na vertical, o quadrado superior direito, o ponto de intersecção desta dobra com a dobra horizontal (a que passa por G e C) dá-nos o ponto A. (O_3)

(3) Coloquemos o ponto B sobre GC mantendo o ponto A fixo $(\boldsymbol{O_5})$, obtemos o ponto D (A dobra é a bissectriz do ângulo $\measuredangle BAC$).

(4) Dobremos agora o ponto C sobre o ponto D $(\boldsymbol{O_2})$ o que determina a mediatriz do segmento de recta $[DC]$.

(5) Dobremos o ponto B sobre a mediatriz do segmento $[DC]$ mantendo fixo o ponto C , $(\boldsymbol{O_5})$. Encontramos o ponto que designamos por E .

$[EG]$ é agora um lado do nosso pentágono.

Comecemos por provar que $\overline{EG}$ é a medida do comprimento do lado de um pentágono regular. Para tal iremos mostrar que $\overline{GC}=\overline{EC}$ e que $E\hat{C}G=\frac{2\pi}{5}$.

$\overline{GC}=\overline{EC}$, porque $\overline{EC}=\overline{CB}$ e $\overline{CB}=\overline{GC}$.

Provemos, agora, que $E\hat{C}G=\frac{2\pi}{5}$.

Ora, sabemos que $\cos\left(E\hat{C}G\right)=\frac{\overline{FC}}{\overline{CE}}$.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\overline{GC}=1$.

Então $\overline{CE}=1$ pois E foi obtido por uma reflexão que mantêm C fixo e transforma B em E.

Temos também que $\overline{DA}=\overline{BA}$, porque D foi obtido por uma reflexão que mantendo fixo o ponto A e transforma B em D.

Como o triângulo $[ABC]$ é rectângulo em C, aplicando o Teorema de Pitágoras vem que:

$$\overline{BA}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$$

$$\overline{BA}^2=1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\overline{BA}^2=\frac{5}{4}\Rightarrow\overline{BA}=\frac{\sqrt{5}}{2},$$

ou seja, $\overline{DA}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Sendo $\overline{DC}=\overline{DA}-\overline{CA}$ tem-se que $\overline{DC}=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Mas F é o ponto médio do segmento $[DC]$, visto que foi obtido dobrando o ponto C sobre o ponto D, então $\overline{FC}=\frac{\overline{DC}}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ e portanto $\cos\left(E\hat{C}G\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Como [85] $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, vem $E\hat{C}G=\frac{2}{5}\pi$ e sendo assim $\overline{EG}$ é a medida do comprimento do lado de um pentágono regular.

A partir daqui podemos reproduzir os outros vértices do pentágono. Todos os vértices estarão dentro do quadrado original, pois todos estarão sobre a circunferência de centro C e raio $\overline{BC}$.

[85] Ver Anexo I.

Para construir todo o pentágono procedemos do seguinte modo:

- dobramos o quadrado por $[CG]$ e a nova posição de E, E_1, é o novo vértice do pentágono;
- colocando G sobre E mantendo fixo o ponto C, a nova posição do ponto E_1 dá-nos outro vértice do pentágono E_2;
- de modo análogo, colocando G sobre E_2 mantendo fixo o ponto C, a nova posição de E_1 dá-nos E_3, o 5.º vértice deste pentágono.

3.3 Demonstração de Teoremas usando Origami

3.3.1 Teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo [21]

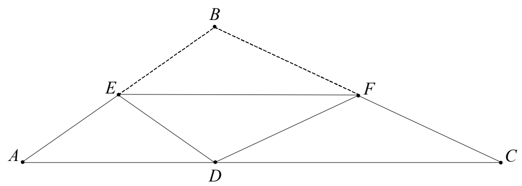
A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

Prova

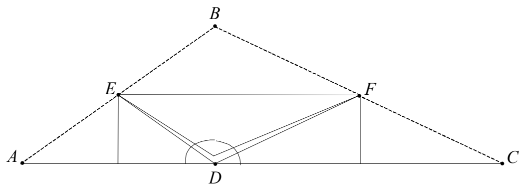
Construa-se um triângulo $[ABC]$ e mostre-se que a soma dos ângulos internos é 180º.

Consideremos o ângulo $\measuredangle ABC$ obtuso[86].

(1) Dobremos o vértice B sobre A, (O_2). Obtemos o ponto E, ponto médio de $[AB]$.



(2) Coloquemos B sobre $[AC]$, mantendo fixo o ponto E, seja D o ponto obtido. (O_5)



(3) Dobremos os vértices A e C sobre o ponto D. (O_2)

Verificámos deste modo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o. Senão vejamos.

Sabemos que:

(i) $A\hat{B}C = E\hat{D}F$, porque os triângulos $[BEF]$ e $[EDF]$ são geometricamente iguais[87];

[86] Quando o triângulo é obtusângulo começamos a dobrar pelo ângulo obtuso.
[87] Critério *LLL* da igualdade de triângulos.

(ii) $E\hat{A}D = E\hat{D}A$, porque o triângulo $[EAD]$ é isósceles, logo os ângulos da base são iguais;

(iii) $D\hat{C}F = F\hat{D}C$, porque o triângulo $[FDC]$ é isósceles;

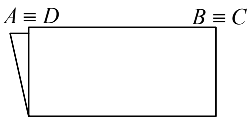
(iv) $A\hat{D}C = 180º$;

(v) $A\hat{D}C = E\hat{D}F + A\hat{D}E + F\hat{D}C$.

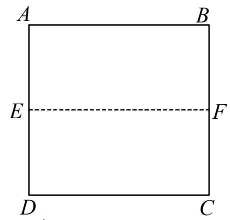
Mas por (i), (ii), (iii), (iv) e (v) tem-se que $B\hat{A}C + A\hat{C}B + C\hat{B}A = 180º$.

3.3.2 Teorema de Haga ([18] e [20])

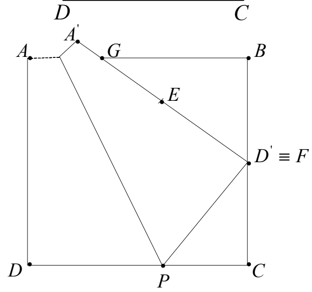
(1) Peguemos numa folha quadrada e dobremo-la fazendo A coincidir com D e B coincidir com C. (O_2)



(2) Abramos a folha de papel. Determinámos desta forma os pontos que denotaremos por E e F, pontos médios de $[AD]$ e $[BC]$, respectivamente;



(3) Façamos D coincidir com F. (O_2)

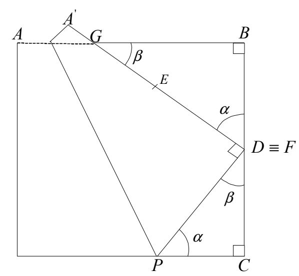


Seja A' a nova posição do ponto A, D' a nova posição de D, e seja G a intersecção de $[A'D']$ com $[AB]$, assim construímos um triângulo rectângulo com um cateto $[CF]$, e a soma do outro cateto com a hipotenusa igual ao comprimento do lado do quadrado.

Usando um processo análogo para o segmento $[DC]$, podemos obter o ponto H, tal que $HB = \frac{1}{3}l$.

Os pontos G *e* H assim obtidos dividem o lado $[AB]$ em três segmentos geometricamente iguais.

Vamos demonstrar esta afirmação, que é conhecida como ***Teorema de Haga.***



Provemos, por exemplo, que $\overline{AG} = \frac{1}{3}l$

Os triângulos $[FGB]$ e $[PFC]$ são semelhantes, pois têm de um para o outro, os três ângulos correspondentes iguais, porque são ângulos agudos de lados perpendiculares[88].

Portanto, $\dfrac{\overline{BF}}{\overline{PC}} = \dfrac{\overline{GB}}{\overline{FC}}$.

Como $\overline{FC} = \overline{BF} = \dfrac{l}{2}$,

então

(i) $\overline{GB} \times \overline{PC} = \dfrac{l^2}{4}$

O triângulo $[PFC]$ é rectângulo, então usando o teorema de Pitágoras vem:

(ii) $\overline{PF}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{FC}^2$.

Como $\overline{PC} + \overline{PF} = l$, tem-se:

(iii) $\overline{PF} = l - \overline{PC}$.

Substituindo (iii) em (ii) obtemos:

$$\left(l - \overline{PC}\right)^2 = \overline{PC}^2 + \overline{FC}^2$$

$$l^2 - 2l\overline{PC} + \overline{PC}^2 = \frac{l^2}{4} + \overline{PC}^2$$

$$l^2 - 2l\overline{PC} - \frac{l^2}{4} = 0$$

$$3l^2 - 8l\overline{PC} = 0$$

$$l\left(3l - 8\overline{PC}\right) = 0$$

$$l = 0 \quad \vee \quad \left(3l - 8\overline{PC}\right) = 0$$

Como $l \neq 0$ vem $3l - 8\overline{PC} = 0$.

Ou seja, $\overline{PC} = \dfrac{3\,l}{8}$.

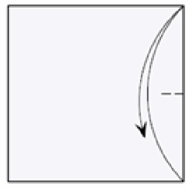
Substituindo agora em (i) $\overline{PC}$ pelo valor encontrado temos $\overline{GB} \times \dfrac{3\,l}{8} = \dfrac{l^2}{4}$, isto é, $\overline{GB} = \dfrac{2\,l}{3}$.

Então $\overline{AG} = l - \dfrac{2}{3}l$, portanto $\overline{AG} = \dfrac{l}{3}$.

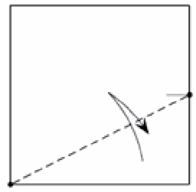
[88] Teorema 4.5._Resultados preliminares

Além deste método para dividir um segmento em três partes iguais, existe um outro um pouco mais complexo que apresentaremos de seguida. O método anterior poderá ser utilizado no 8.º ano de escolaridade enquanto o próximo método no Ensino Secundário.

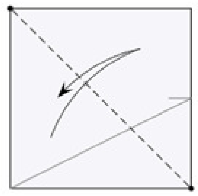
(1) Peguemos numa folha de papel quadrada e marquemos o ponto médio na sua extremidade direita (O_2)



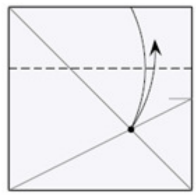
(2) Façamos uma dobra que una o vértice inferior do lado oposto ao ponto médio determinado no passo (1). (O_2)



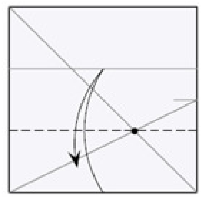
(3) Dobremos o vértice inferior direito sobre o vértice do canto superior esquerdo do lado oposto. (O_2)



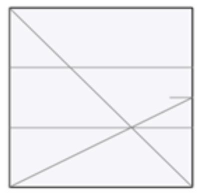
(4) Dobremos horizontalmente, de forma que a extremidade superior toque na intersecção das dobras anteriores. (O_6)



(5) Dobremos horizontalmente de forma que a extremidade inferior toque na dobra anterior e abrir.



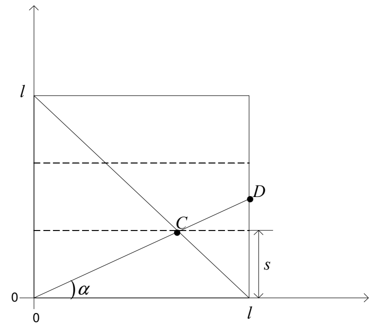
(6) As dobras horizontais dividem a folha em três partes iguais.



Demonstremos a afirmação do passo (6) *(conhecida como Teorema de Haga).*

Mostremos que a sequência de passos de (1) a (6) divide a folha de papel em três partes iguais.

A figura ao lado reproduz o resultado do passo (6).



Coloquemos um referencial cartesiano sobre esta figura e façamos coincidir a origem deste referencial com o vértice do canto inferior do quadrado.

O ponto C está à mesma distância das extremidades inferior e direita da folha, pois está sobre a diagonal do quadrado. Denominemos s por essa distância. Então as coordenadas de C são $(x_C, y_C) = (l - s, s)$, onde l é a medida do comprimento do lado do quadrado.

As coordenadas do ponto D são $(x_D, y_D) = \left(l, \frac{l}{2}\right)$.

Donde

(i) $tg\alpha = \frac{y_C}{x_C} = \frac{s}{l-s}$

e (ii) $tg\alpha = \frac{y_D}{x_D} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$.

Igualando (i) e (ii) vem:

$$\frac{s}{l-s} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2s = l - s$$

$$\Leftrightarrow \quad 3s = l$$

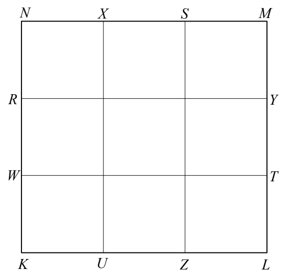
$$\Leftrightarrow \quad s = \frac{l}{3} \qquad c.q.p.$$

Pelos passos (4) e (5), a distância entre ambas as linhas dobrando na horizontal, e entre a linha superior e a extremidade superior do quadrado, também deve ser $\frac{l}{3}$.

3.3.3 Teorema de Pitágoras [21]

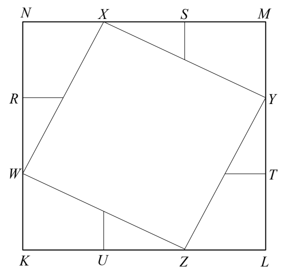
(1) Usemos o Teorema de Haga para dividir cada um dos lados do quadrado de papel $[KLMN]$ em três partes iguais.

(2) Designemos por $U,\ Z,\ T,\ Y,\ S,\ X,\ R,\ W$ os pontos anteriormente obtidos.



(3) Unamos X com U; S com Z; Y com R e T com W, como mostra a figura ao lado.

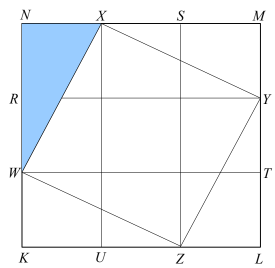
(4) Façamos uma dobra que passe por X e por W, outra por X e Y, outra por Y e Z e por fim uma que passe por Z e W.



Com as marcas das dobras temos o quadrado $[WXYZ]$ inscrito no quadrado $[KLMN]$.

Seja $\overline{NX} = a$, $\overline{NW} = b$ e $\overline{WX} = c$.

Analisando as relações entre as áreas do quadrado inicial, do quadrado inscrito e do triângulo $[WXN]$, em função de a, b e c tem-se que:



A área do quadrado $[KLMN]$ é $(a+b)^2$;

A área do quadrado $[WXYZ]$ é c^2;

A área do triângulo $[WXN]$ é $\frac{1}{2}a\,b$.

Como

Área do quadrado $[KLMN]$ = Área do quadrado $[WXYZ]$ + $4\times$ Área do triângulo $[WXN]$

vem

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\times\frac{1}{2}a\,b\,.$$

Isto é

$$a^2 + 2a\,b + b^2 = c^2 + 2a\,b\,.$$

Ou seja,

$a^2 + b^2 = c^2$, que é o Teorema de Pitágoras.

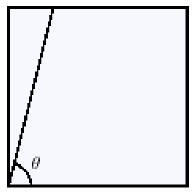
3.4 Resolução de Problemas Clássicos da Antiguidade usando Origami

Não sendo possível resolver a trissecção de um ângulo e a duplicação do cubo usando apenas régua não graduada e compasso, não deixa de ser curioso ser possível resolver estes problemas dobrando apenas uma folha de papel. Vejamos como.

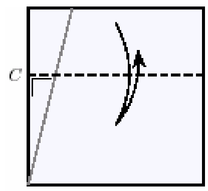
3.4.1 Trissecção de um ângulo [20]

Partimos de uma folha quadrada de papel, de dimensão arbitrária. Consideramos aqui a trissecção de um ângulo agudo.

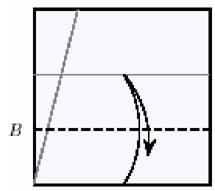
(1) Marquemos o ângulo θ a trissectar.



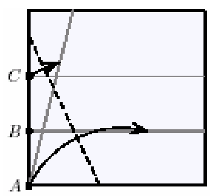
(2) Dobremos horizontalmente, em qualquer lugar da folha. Seja C o ponto de intersecção da dobra obtida com o lado lado esquerdo do quadrado. (O_2)



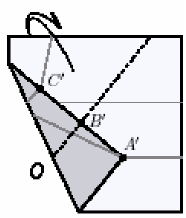
(3) Dobremos de modo a sobrepor a outra extremidade sobre a dobra obtida anteriormente, e denotemos por B o ponto da intersecção da dobra obtida com o lado esquerdo do quadrado. (O_2)



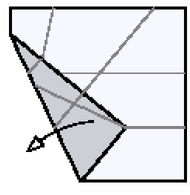
(4) Dobremos de forma que o ponto A, vértice inferior do quadrado, fique sobre a linha horizontal indicada na figura e o ponto C sobre a linha obliqua marcada no passo (1). (O_6)



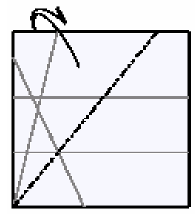
(5) Dobremos prolongando a linha que termina no ponto B' (dobra feita no passo (3)). (O_1)



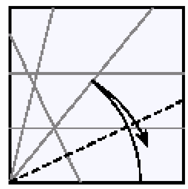
(6) abrir.



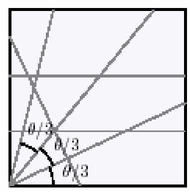
(7) Dobrar prolongando a dobra feita no passo (5).



(8) Dobrar o lado inferior sobre a dobra obtida no passo (7).

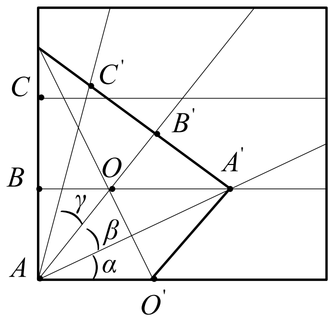


(9) Resultado final.



Prova

Observemos a figura ao lado que representa o passo final e a dobragem dos passos (4) e (7).



Queremos mostrar que $\alpha = \beta = \gamma$ e que A' pertence à dobra obtida no passo (8).

Para mostrar que A' pertence à dobra obtida no passo (8) iremos provar que A' está na bissectriz do ângulo $\measuredangle B'AO'$.

Mas

(i) $\overline{AO} = \overline{AO'}$, pois são hipotenusas de dois triângulos rectângulos geometricamente iguais,

e (ii) $\overline{OA'} = \overline{O'A'}$, por reflexão do ponto A sobre a recta OO' (que é a dobra obtida no passo (4)).

Por (i) e (ii) concluímos que A' está na bissectriz do ângulo $\measuredangle B'AO'$.

Pelo passo (8), sabemos que $\alpha = \beta$.

Analisemos agora os triângulos $[AA'B']$ e $[AB'C']$.

(iii) $[AB']$ é um lado comum dos dois triângulos.

Pelo passo (3), $\overline{AB} = \overline{BC}$ e portanto

(iv) $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$.

Pelo passo (5),

(v) $AB' \perp A'C'$.

Por (iii), (iv) e (v) podemos concluir que os triângulos $[AA'B']$ e $[AB'C']$ são geometricamente iguais[89], e consequentemente que $\beta = \gamma$.

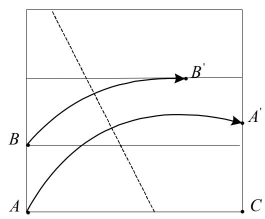
3.4.2 Duplicação do Cubo [20]

Partimos de uma folha quadrada de papel, de dimensão arbitrária.

Comecemos por dividir a folha em três partes iguais usando o ***Teorema de Haga***.

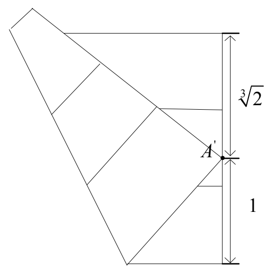
Os passos seguintes determinam $\sqrt[3]{2}$, a aresta de um cubo com o dobro do volume do cubo de aresta 1. As linhas das dobras que não são relevantes foram eliminadas, para maior clareza.

(1) Dobremos para que o ponto A fique sobre o lado direito, e o ponto B sobre a linha horizontal indicada, obtida usando Teorema de Haga. (O_6)



Designemos, respectivamente, por A' e B' os pontos obtidos.

(2) A distância do vértice superior direito a A' é $\sqrt[3]{2}$.

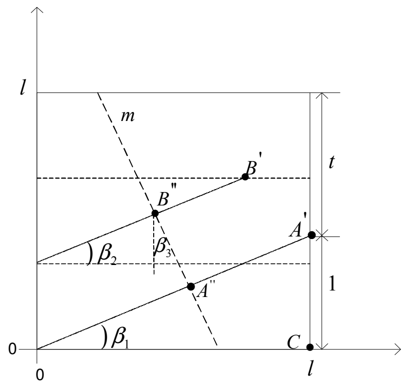


Prova

Demonstremos que a dobra do passo (1) determina $\sqrt[3]{2}$ sobre o lado direito da folha de papel, tomando para unidade a medida do comprimento de $[CA']$.

89 Critério LAL

Colocamos um referencial com origem no canto inferior esquerdo da folha de papel.



Os pontos A e B são os indicados no passo (1) anterior e têm coordenadas $(x_A, y_A) = (0,0)$ e $(x_B, y_B) = \left(0, \frac{l}{3}\right)$, respectivamente. Onde l é a medida do comprimento do lado do quadrado.

Nesse mesmo passo, realizámos a dobra sobre a linha m, e os pontos A e B passam a ocupar as posições A' e B', respectivamente, de coordenadas $(x_{A'}, y_{A'}) = (l,1)$ e $(x_{B'}, y_{B'}) = \left(a, \frac{2l}{3}\right)$ onde a representa a abcissa do ponto B'.

Os pontos A'' e B'', sobre a linha da dobra são os pontos médios dos segmentos $[AA']$ e $[BB']$, respectivamente, e têm coordenadas $(x_{A''}, y_{A''}) = \left(\frac{l}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $(x_{B''}, y_{B''}) = \left(\frac{a}{2}, \frac{l}{2}\right)$.

Os três ângulos designados por β_1, β_2 e β_3 com vértice em A, B e B'' são iguais[90]. Calculemos o valor da tangente de cada um deles em cada um dos casos:

(1) $tg\beta_1 = \dfrac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} = \dfrac{1}{l}$

(2) $tg\beta_2 = \dfrac{y_{B'} - y_B}{x_{B'} - x_B} = \dfrac{\frac{2l}{3} - \frac{l}{3}}{a - 0} = \dfrac{\frac{l}{3}}{a}$

(3) $tg\beta_3 = \dfrac{x_{A''} - x_{B''}}{|y_{A''} - y_{B''}|} = \dfrac{l - a}{l - 1}$

Igualando as equações (1) e (2) obtemos:

$$\frac{1}{l} = \frac{l}{3a} \Rightarrow a = \frac{l^2}{3}$$

[90] $\beta_1 \cong \beta_2$ porque são ângulos agudos de lados paralelos e $\beta_3 \cong \beta_2$ porque são ângulos agudos de lados perpendiculares.

Igualando (1) a (3) e substituindo o valor de a encontrado anteriormente

tem-se $\frac{1}{l}=\frac{l-a}{l-1} \Rightarrow \frac{1}{l}=\frac{l-\frac{l^2}{3}}{l-1}$,

ou seja,

$$\frac{1}{l}=\frac{\frac{3l-l^2}{3}}{l-1} \Leftrightarrow \frac{1}{l}=\frac{3l-l^2}{3l-3} \Leftrightarrow 3l-3=3l^2-l^3 \Leftrightarrow l^3-3l^2+3l-3=0$$

que pode ainda ser escrita da seguinte forma $(l-1)^3-2=0$.

Substituindo t por $l-1$ vem:

$t^3-2=0$

$\Leftrightarrow t^3=2$

$\Leftrightarrow t=\sqrt[3]{2}$ o que prova o requerido.

Observe-se que a raiz cúbica de 2 é a solução da equação $x^3-2=0$. Utilizando dobragens de uma folha de papel é possível resolver qualquer equação cúbica, o que não é possível fazer usando régua e compasso. Isso permite resolver outros problemas geométricos de construção que possam ser reduzidos a uma equação cúbica, como a trissecção de um ângulo que vimos anteriormente e a construção de um heptágono regular. [20]

Conclusão

Este trabalho teve como objectivo principal a procura de possíveis e desejáveis ligações entre a Matemática e outras disciplinas, na tentativa de criar um todo organizado, onde os aspectos didácticos e a perspectiva histórica não fossem esquecidos. No entanto procurou, também, mostrar-se que os processos de resolução podem não ser únicos e que muitas vezes há várias formas de resolver um problema, algumas delas até muito criativas quando "saltamos o muro" e procuramos ajuda noutras disciplinas.

Agora fica o desejo de que este trabalho possa ser útil a alguém, quer a alunos, quer a professores.

Referências bibliográficas

Livros

[1] Aaboe, A., *Episódios da história antiga da Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

[2] Araújo, Paulo Ventura, Curso de Geometria, Gradiva_Publicações Lda, 1998.

[3] Barbosa, João Lucas Marques, *Geometria Euclidiana Plana*, Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

[4] Boyer, Carl, *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgar Blücher Lda, 1974.

[5] Estrada, Maria Fernanda; Sá, Carlos Correia; Queiró, João Filipe; Silva, Maria do Céu; Costa, Maria José, *História da Matemática*, Universidade Aberta: Lisboa, 2000.

[6] Veloso, Eduardo, *Geometria: Temas actuais: Materiais para professores*, Instituto de Inovação Educacional.

[7] Oliveira, A. J. Franco, *Transformações Geométricas*, Universidade Aberta, 1997.

[8] Oliveira, A. J. Franco, *Geometria Euclidiana*, Universidade Aberta, 1995.

[9] Torres, Olímpia; Oyarbide, Miguel Ângelo; Oyarbide, Alberto; Hernán, M. González; Docampo, D. Ribao; Garcia, F. Fullea; Jardim, António; *IMAGIN'ARTE*, Educação Visual, 3.º Ciclo do Ensino Básico, ANAYALIVRO Editores Associados.

[10] Jorge, Ana M. B.; Alves, Conceição B.; Fonseca, Graziela; Barbedo, Judite; *Infinito* (Parte 3), Matemática A 12º Ano, Areal Editores, 2005.

Artigos

[11] Antunes, A. J. M.: Pentágono Inscrito numa Circunferência, Gazeta Matemática n.º138, 47-49, 2000.

[12] Veloso, Eduardo: A Quadratura do Círculo: Uma Solução não Ortodoxa, educação Matemática n.º 33, 1.º trimestre de 1995.

[13] Sousa, José Miguel Rodrigues, Trissecção do Ângulo e Duplicação do Cubo: as Soluções na Antiga Grécia, Tese de Mestrado sob a orientação do professor Carlos Manuel Monteiro Correia de Sá, Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da universidade do Porto, 2001.

[14] Carvalheiro, Cidália Santos, Extensões de Corpos, Monografia sob a orientação da Professora Doutora Enide Martins, Publicação interna do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, 2005.

Sites

[15] http://pascal.iseg.utl.pt/~ncrato/Expresso/NumeroDeOuro_Expresso_20030614.htm

[16] http://www.jimloy.com/geometry/pentagon.htm

[17] http://cidadaodomundo.weblog.com.pt/arquivo/040747.html

[18] http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_iicap1.pdf

[19] http://www.mat.uc.pt/~picado/algebraII/apontamentos/sebenta.pdf

[20] http://www.mat.unb.br/~lucero/orig.html

[21] http://www.voxxel.com.br/fatima/origami/origami.pdf

[22] http://www.mes.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/phi2DGeomTrig.html#spiral

Bibliografia

Livros

Aaboe, A., Episódios da história antiga da Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

Araújo, Paulo Ventura, Curso de Geometria, Gradiva_Publicações Lda, 1998.

Barbosa, João Lucas Marques, Geometria Euclidiana Plana, Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

Boyer, Carl B., História da Matemática. São Paulo: Editora Edgar Blücher Lda, 1974.

Carvalho, Luís M.; Guimarães, C., História e Tecnologia no Ensino da Matemática, Volume I, Editora IME-URE, 2002.

Estrada, Maria Fernanda; Sá, Carlos Correia; Queiró, João Filipe; Silva, Maria do Céu; Costa, Maria José, História da Matemática, Universidade Aberta: Lisboa, 2000.

Heath, T., A History of Greek Mathematics, New York, Dover Publications Inc., 1981.

Oliveira, A. J. Franco, Transformações Geométricas, Universidade Aberta, 1997

Veloso, Eduardo, Geometria: Temas actuais: Materiais para professores, Instituto de Inovação Educacional.

Torres, Olímpia; Oyarbide, Miguel Ângelo; Oyarbide, Alberto; Hernán, M. González; Docampo, D. Ribao; Garcia, F. Fullea; Jardim, António; IMAGIN'ARTE, Educação Visual, 3.º Ciclo do Ensino Básico, ANAYALIVRO Editores Associados.

Jorge, Ana M. B.; Alves, Conceição B.; Fonseca, Graziela; Barbedo, Judite; Infinito (Parte 3), Matemática A 12º Ano, Areal Editores, 2005.

CD-Rom

Concise Encyclopaedia of Mathematics CD-Rom, Eric w. Weisstein
CD-Rom Edition 1.0, May 20, 1999.

Artigos

Antunes, A. J. M.: Pentágono Inscrito numa Circunferência, Gazeta Matemática n.º138, 47-49, 2000.

Bascetta, Paolo: Origami: Geometria con la carta (1), Quatrato Magico, n.º 52, Abril 1998.

Lang, Robert J., Origami e Construções Geométricas, 1996

Veloso, Eduardo: A Quadratura do Círculo: Uma Solução não Ortodoxa, Educação Matemática n.º 33, 1.º trimestre de 1995.

Veloso, Eduardo; Construções Geométricas, o Prazer dos Deuses,..., Educação Matemática n.º 73, 2003.

Veloso, Eduardo; O triunfo da Álgebra, Educação Matemática n.º 85, 2005.

Sousa, José Miguel Rodrigues, Trissecção do Ângulo e Duplicação do Cubo: as Soluções na Antiga Grécia, Tese de Mestrado sob a orientação do professor Carlos Manuel Monteiro Correia de Sá, Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da universidade do Porto, 2001.

Carvalheiro, Cidália Santos, Extensões de Corpos, Monografia sob a orientação da Professora Doutora Enide Martins, Publicação interna do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, 2005.

Sites

http://www.dgidc.min-edu.pt/programs/programas.asp

http://nonio.fc.ul.pt/analise1/cap1/numalg.htm

http://www.mat.uc.pt/~picado/algebraII/apontamentos/sebenta.pdf

http://www.dgidc.min-edu.pt/programs/progrec_eh.asp

http://phoenix.sce.fct.unl.pt/pub2/ColoquioCiencias/Data/COL11/11-1.pdf

http://www.mat.uc.pt/~me0203/LivroWebAM/coordenadas_polares_trigonometria.html

http://www.prof2000.pt/users/miguel/histmat/af18/produto/moura/accao18trab5.html#OPLANO

http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euler/index.htm

http://geometrias.blogspot.com

http://www2.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/APPUNTI/TESTI/Apr_03/Cap11.html

http://pascal.iseg.utl.pt/~ncrato/Expresso/NumeroDeOuro_Expresso_20030614.htm

http://www.eduardoveloso.com/

http://blogs.prof2000.pt/geometria-descritiva/

http://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

http://pt.wikipedia.org/wiki/Delos

http://www.fc.up.pt//mp/jcsantos/problemasclassicos.html

http://www.mat.uc.pt/~bebiano/3prob/arquim.htm

http://cidadaodomundo.weblog.com.pt/arquivo/040747.html http://www.mat.uel.br/geometrica/artigos/5T-15-TC.pdf

http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib2.htm

http://www.jimloy.com/geometry/pentagon.htm

http://www.mat.unb.br/~lucero/orig.html

http://www.voxxel.com.br/fatima/origami/origami.pdf

http://www.ime.uerj.br/~progerio/monografia/2005_6/pesquisa.pdf

http://www.bienasbm.ufba.br/M20.pdf

http://nonio.fc.ul.pt/analise1/cap1/numalg.htm

http://www.mat.ua.pt/~me0409/breve historiacurvas.doc

http://semiramis.webblog.com.pt/arquivo/167934.html

http://www.mes.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/phi2DGeomTrig.html#spiral

http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_iicap1.pdf

Resultado

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ e } \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

Prova:

Como $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=-\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$

então,

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)=0$$

logo $\frac{\pi}{5}$ é uma raiz da equação $\cos(3\alpha)+\cos(2\alpha)=0$.

Mas[1] $\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-sen^2(\alpha)$.

Pela fórmula fundamental da trigonometria tem-se que $\cos^2\alpha+sen^2\alpha=1$, isto é, $sen^2\alpha=1-\cos^2\alpha$.

Então $\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-1+\cos^2(\alpha)$

ou seja,

(1) $\cos(2\alpha)=2\cos^2(\alpha)-1$.

Como $\cos(3\alpha)=\cos(\alpha+2\alpha)$,

tem-se

$$\cos(3\alpha)=\cos(2\alpha).\cos\alpha-sen(2\alpha).sen\alpha$$

Mas [2] $sen(2\alpha)$ = 2sen(α) . $\cos(\alpha)$,

tem-se

$$\cos(3\alpha)=\left(2\cos^2\alpha-1\right).\cos\alpha-\left(2sen\alpha.\cos\alpha\right).sen\alpha.$$

Então

---

[1] $cos(2\alpha)=cos(\alpha+\alpha)=cos\,\alpha.cos\,\alpha-sen\alpha.sen\alpha=cos^2\alpha-sen^2\alpha$

[2] $$\begin{aligned} sen(2\alpha)&=sen(\alpha+\alpha)\\ &=sen\alpha.\cos\alpha+sen\alpha.\cos\alpha\\ &=2sen\alpha.\cos\alpha \end{aligned}$$

$$\cos(3\alpha) = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2sen^2\alpha.\cos\alpha$$

$$\cos(3\alpha) = 2\cos^3(\alpha) - \cos(\alpha) - 2\left(1-\cos^2(\alpha)\right).\cos(\alpha)$$

$$\cos(3\alpha) = 2\cos^3(\alpha) - \cos(\alpha) - 2\cos(\alpha) + 2\cos^3(\alpha),$$

logo

(2) $\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$.

Por (1) e (2) vem:

$$\cos(3\alpha) + \cos(2\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha) + 2\cos^2(\alpha) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3(\alpha) + 2\cos^2(\alpha) - 3\cos(\alpha) - 1 = 0$$

como π é raiz da equação $\cos(3\alpha)+\cos(2\alpha)=0$ e $\cos\pi=-1$ o polinómio $4x^3+2x^2-3x-1$ é divisível por $x+1$, fazendo $x=\cos\alpha$ e pode concluir-se que as equações $4x^3+2x^2-3x-1=0$ e $(x+1)\left(4x^2-2x-1\right)=0$ são equivalentes[3].

Determinemos as raízes do polinómio $Q(x)=4x^2-2x-1$.

$$4x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+16}}{8}=\frac{2\pm\sqrt{20}}{8}=\frac{2\pm2\sqrt{5}}{8}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$$

Concluímos deste modo que as raízes do polinómio $P(x)=4x^3+2x^2-3x-1$ são -1, $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ e $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Tem-se então que

$$\cos(3\alpha)+\cos(2\alpha)=0 \quad \Leftrightarrow \cos\alpha=-1 \quad \vee \quad \cos\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{4} \quad \vee \quad \cos\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

[3]

	4	2	-3	-1
-1		-4	2	1
	4	-2	-1	0

Então $4x^3+2x^2-3x-1=(x+1)\left(4x^2-2x-1\right)$

Donde $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ é um destes três valores, vejamos qual deles.

Como $\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{\pi}{5} < \dfrac{\pi}{3}$,

Então

$\cos\dfrac{\pi}{3} < \cos\dfrac{\pi}{5} < \cos\dfrac{\pi}{6}$, porque a função $\cos$ é decrescente no intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Isto é,

$$\frac{1}{2} < \cos\frac{\pi}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donde $\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Tem-se então, por **(1)**, que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = 2\cos^2\dfrac{\pi}{5} - 1$,

isto é,

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2\times\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1$$

$$= 2\times\frac{1+2\sqrt{5}+5}{16} - 1$$

$$= \frac{-2+2\sqrt{5}}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Iremos verificar se o método geral para inscrever polígonos regulares numa circunferência é rigoroso no caso do triângulo equilátero, do quadrado, do pentágono, do heptágono e do eneágono. Em cada um dos casos suporemos, sem perda de generalidade, que o raio das circunferências é $r=1$.

Analogamente ao que foi feito para o caso do hexágono e do octógono denotaremos por $[AB]$ o diâmetro da circunferência onde vamos inscrever o polígono, por M o ponto de intersecção de dois arcos das circunferências com centros em A e em B e raio $\overline{AB}$, a partir de A o segundo ponto de divisão de $[AB]$ é A_2.

$[AC]$ é o lado do polígono que estamos a inscrever, sendo C um ponto da circunferência que está no lado oposto a M em relação ao diâmetro $[AB]$.

Para verificar se o método é rigoroso verificaremos se MA_2 coincide com MC.

Tracemos a semi-recta $\dot{M}O$ e denotemos por P o ponto de intersecção desta semi-recta com a recta paralela a AB que passa por C, isto é $CP \parallel AB$.

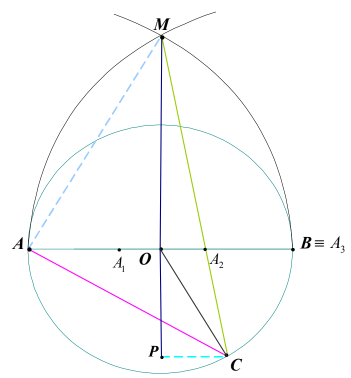
Sejam $\alpha = O\hat{M}A_2$ e $\beta = P\hat{M}C$.

Determinemos para cada um dos casos $tg\alpha$ e $tg\beta$.

[4] $\overline{MO}=\sqrt{3}$.

Triângulo Equilátero

Ora $tg\,\alpha = \dfrac{\overline{OA_2}}{\overline{MO}}$.



Mas $\overline{AA_2} = 2\times\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$

e $\overline{OA_2} = \overline{OA} - \overline{AA_2} \;= \dfrac{4}{3} - 1 \;= \dfrac{1}{3}$,

então $tg\,\alpha = \dfrac{\frac{1}{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

De modo análogo determinemos $tg\,\beta = \dfrac{\overline{PC}}{\overline{MP}}$.

Como $[COB]$ é um triângulo equilátero cada um dos ângulos internos tem 60^o de amplitude, donde $P\hat{O}C = 30^o$, logo

4 $\overline{MO}$ já foi determinado no capítulo I, página 42, esta medida do comprimento não depende do número de partes em que o diâmetro da circunferência é dividido.

(i) $\overline{PC} = sen\, 30^{o} = \frac{1}{2}$

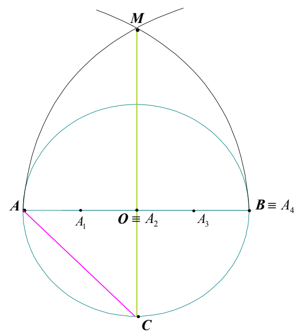
(ii) $\overline{PO} = \cos 30^{o} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Por (i) e (ii) vem:

$$tg\,\beta = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

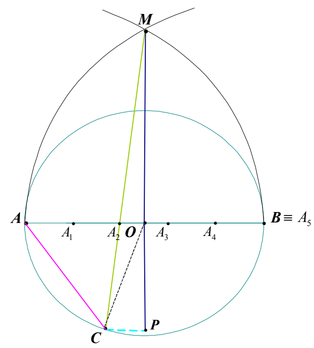
Como $tg\,\alpha = tg\,\beta$ concluímos que o método é rigoroso no caso do triângulo.

Quadrado



Como $O \equiv A_2$ e C, vértice do quadrado inscrito, é o ponto de intersecção de MO com a circunferência, fica trivialmente provado que A_2M coincide com MC,

Pentágono



$tg\,\alpha = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{MO}}$.

Mas $\overline{OA_2} = \overline{OA} - \overline{AA_2}$.

Como $\overline{AA_2} = \frac{2}{5}\times 2 = \frac{4}{5}$ e $\overline{OA} = 1$

vem $\overline{OA_2} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$,

então $tg\,\alpha = \frac{\frac{1}{5}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{5\sqrt{3}} \simeq 0{,}1155$.

Fazendo uma aproximação às décimas tem-se $tg\,\alpha \simeq 0{,}12$.

De modo análogo determinemos $tg\,\beta = \frac{\overline{CP}}{\overline{MP}}$.

Sendo $[AC]$ o lado do pentágono regular $A\hat{O}C = 72^{o}$.

Como os ângulos $\measuredangle\, OCP$ e $\measuredangle\, AOC$ têm lados paralelos e são ambos agudos $O\hat{C}P = 72^{o}$.

Então

$$\cos O\hat{C}P = \frac{\overline{CP}}{\overline{CO}} \Leftrightarrow \cos 72^o = \frac{\overline{CP}}{\overline{CO}}$$

Mas $\overline{CO} = 1$ e no Apêndice I provámos que $\cos 72^o = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

logo $\overline{CP} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Calculemos agora $\overline{MP}$.

$$\overline{MP} = \overline{MO} + \overline{OP}.$$

$$\overline{OP}^2 + \overline{CP}^2 = 1 \Leftrightarrow \overline{OP}^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2$$

$$\overline{OP}^2 = 1 - \frac{5+2\sqrt{5}+1}{16}$$

$$\overline{OP}^2 = \frac{16-5-2\sqrt{5}-1}{16}$$

$$\overline{OP}^2 = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$

$$\overline{OP}^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$$

$$\overline{OP} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

$$\overline{OP} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}$$

$$\overline{OP} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Então $\overline{MP} = \sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = \dfrac{4\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Donde $tg\beta = \dfrac{\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}}{\dfrac{4\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \simeq 0{,}1332$.

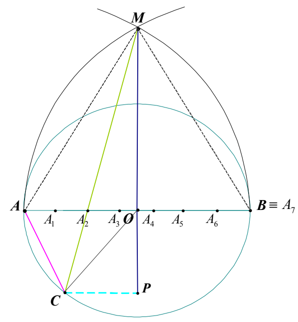
Fazendo uma aproximação às décimas tem-se $tg\beta \simeq 0{,}13$.

Como $tg\alpha \simeq 0{,}12$ e $tg\beta \simeq 0{,}13$.

Vem $\beta \simeq 7^{º},586$ e $\alpha \simeq 6^{º},589$.

Então $|\alpha-\beta| \simeq 1^{o}$, ou seja temos um erro de aproximadamente 1°.

Heptágono



$tg\,\alpha = \dfrac{\overline{OA_2}}{\overline{MO}}$.

Mas $\overline{OA_2} = \overline{OA} - \overline{AA_2}$.

Como $\overline{AA_2} = \dfrac{2}{7} \times 2 = \dfrac{4}{7}$ e $\overline{OA} = 1$

vem $\overline{OA_2} = 1 - \dfrac{4}{7} = \dfrac{3}{7}$.

Então $tg\,\alpha = \dfrac{\frac{3}{7}}{\sqrt{3}} = \dfrac{3}{7\sqrt{3}} \simeq 0{,}2474$.

Logo $\alpha \simeq 13^{º},8959$

De modo análogo determinemos $tg\,\beta = \dfrac{\overline{CP}}{\overline{MP}}$.

$[AC]$ é um lado do heptágono então $A\hat{O}C = \dfrac{360^{o}}{7}$.

Logo $C\hat{O}P = 90^{o} - \dfrac{360^{o}}{7} = \dfrac{630^{o} - 360^{o}}{7} \simeq 38^{o},6$.

Donde $cos\,C\hat{O}P \simeq 0{,}7815$.

Mas $cos\,C\hat{O}P = \dfrac{\overline{OP}}{\overline{CO}}$ e $\overline{CO} = 1$.

Portanto $\overline{OP} \simeq 0{,}7815$.

Então $\overline{MP} \simeq \sqrt{3} + 0{,}7815$.

Determinemos $\overline{CP}$.

Ora $sen\,C\hat{O}P \simeq 0{,}6239$

e $sen\,C\hat{O}P = \dfrac{\overline{CP}}{\overline{CO}}$ logo $\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CO}} \simeq 0{,}6239$.

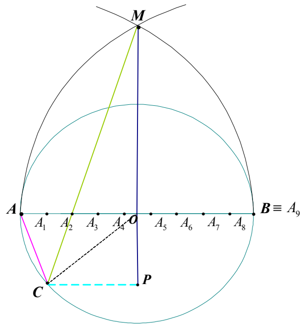
Mas $\overline{CO} = 1$ vem $\overline{CP} \simeq 0{,}6239$.

Então $tg\beta \simeq \dfrac{0,6239}{\sqrt{3}+0,7815} \simeq 0,2482$

Logo $\beta \simeq$ 13º,9391.

$|\alpha - \beta| \simeq$ 0,0432, o erro é pequeno.

Eneágono



$tg\,\alpha = \dfrac{\overline{OA_2}}{\overline{MO}}$.

$\overline{OA_2} = \overline{OA} - \overline{AA_2}$.

Como $\overline{AA_2} = \dfrac{2}{9}\times 2 = \dfrac{4}{9}$ e $\overline{OA} = 1$

vem $\overline{OA_2} = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$,

logo $tg\,\alpha = \dfrac{\frac{5}{9}}{\sqrt{3}} = \dfrac{5}{9\sqrt{3}} \simeq 0,3208$.

Então $\alpha \simeq$ 17º, 7846.

De modo análogo determinemos $tg\,\beta = \dfrac{\overline{CP}}{\overline{MP}}$.

$[AC]$ é um lado do eneágono então $A\hat{O}C = \dfrac{360^o}{9} = 40^o$.

Logo $C\hat{O}P = 90^o - 40^o = 50^o$,

e $cos\,50^o \simeq 0,6428$.

Então $cos\,C\hat{O}P \simeq 0,6428$

Mas $cos\,C\hat{O}P = \dfrac{\overline{OP}}{\overline{CO}}$ e $\overline{CO} = 1$.

Portanto $\overline{OP} \simeq 0,6428$.

Logo $\overline{MP} \simeq \sqrt{3} + 0,6428$.

Determinemos $\overline{CP}$.

Ora $sen\,C\hat{O}P = sen 50^o \simeq 0,7660$

e $sen\,C\hat{O}P = \dfrac{\overline{CP}}{\overline{CO}}$ logo $\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CO}} \simeq 0,7660$.

Mas $\overline{CO}=1$ vem $\overline{CP}\simeq 0,7660$.

Então $tg\beta \simeq \dfrac{0,7660}{\sqrt{3}+0,6428}\simeq 0,3225$

Donde $\beta \simeq$ 17º,8769.

$|\alpha-\beta|\simeq 0,1077$, o erro é pequeno.

Observemos que em todos os polígonos regulares estudados, o erro é sempre inferior a 1 grau.

Resultado

Se o racional $x = \frac{p}{q}$, com $\frac{p}{q}$ irredutível, é solução da equação algébrica $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ $(n \geq 1, \quad a_i \in Z, \quad a_n \neq 0)$, então $p \mid a_0$ e $q \mid a_n$.

Prova

(1) $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$

Iremos provar que:

Se $\frac{p}{q}$ é solução então $p \mid a_0$ e $q \mid a_n$.

Por hipótese $\frac{p}{q}$ é solução de (1), então:

(2) $a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + ... + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$

Multiplicando (2) por q^n vem:

(3) $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + ... + a_1 p . q^{n-1} + a_0 q^n = 0$

$\Leftrightarrow a_n \; p^n + q \left(a_{n-1} \; p^{n-1} + ... + a_1 p . \, q^{n-2} + a_0 \, q^{n-1}\right) = 0$

Seja $-b = a_{n-1} \; p^{n-1} + ... + a_1 p . \, q^{n-2} + a_0 \, q^{n-1}$.

Então tem-se:

(4) $a_n \; p^n = b q$.

Como por hipótese $\frac{p}{q}$ é irredutível, então p e q são primos entre si, portanto p^n e q são primos entre si, mas q divide bq, portanto q divide $a_n p^n$, por (4). Como é primo com p^n tem que dividir a_n.

Mas (3) é equivalente a $p \left(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} . \, q + ... + a_1 \, q^{n-1}\right) + a_0 q^n = 0$

Seja $-a = a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} . \, q + ... + a_1 \, q^{n-1}$.

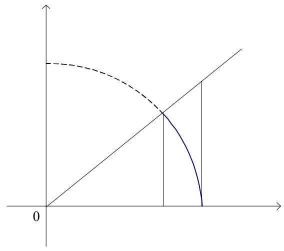
Então tem-se:

(5) $a_0 q^n = a \, p$.

Usando um raciocínio análogo tem-se que sendo p e q primos entre si, p e q^n também o são, no entanto $p \mid a p$, portanto $p \mid a_0 \, q^n$, por (5).

Como p é primo com q^n tem que dividir a_0.

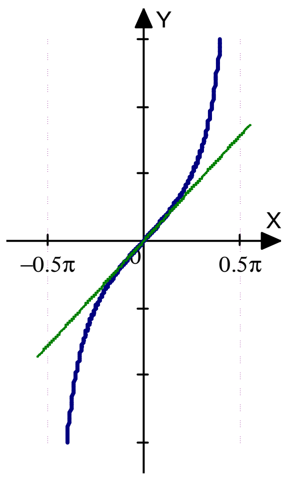
Provemos que $x < tg\ x$, para $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.



Ora, $(tg\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Como $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos^2 x} = 1$, o declive da recta tangente ao gráfico da função $tg\ x$ no ponto de abcissa zero é 1.

Observemos a representação gráfica da função $tg\, x$ e da recta $y = x$, no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.



Observemos que o gráfico da função fica “acima” da recta $y = x$ à direita de $x = 0$ o que nos permite concluir que $x < tg\, x$ para $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Notações

	Notação
Recta	AC
Semi-recta	$\dot{A}C$
Segmento de recta	$[AC]$
Medida do comprimento do segmento de recta	$\overline{AC}$
Arco	$\overset{\frown}{AB}$
Comprimento de arco	$comp\,\overset{\frown}{AB}$
Amplitude do ângulo	$A\hat{B}C$
Paralelismo	$\parallel$
Perpendicularidade	$\perp$
Igualdade geométrica	$\cong$
Semelhança	$\sim$
Arredondamento	$\simeq$